DIALOGO

DI

VINCENZO RICCATI

DELLA COMPAGNIA DI GESU'

Dove

NE' CONGRESSI DI PIU' GIORNATE

DELLE

FORZE VIVE

E DELL'AZIONI DELLE

FORZE MORTE

Si tien Discorso.

IN BOLOGNA

Nella Stamperia di Lelio dalla Volpe.)(1749)(
Con licenza de' Superiori.

PREFAZIONE.

CHiunque vorrà attentamente confiderare, quanto ardua, e difficile impresa fia il comporre una controverfia già inveterata, e per l'opinioni contrarie degli fcrittori inviluppata, e confufa; conofcerà agevolmente, che tanto di ftudio, e di fatica ho foftenuto nel difaminare la celebre quiftion delle forze vive, quanto ftato farebbe valevole ad atterrire ogni filofofo più paziente. Se la materia pervenuta mi foffe vergine, e intatta; ne alcun de' molti fcrittori aveffe fopra d'effa i penfieri fuoi pubblicati, avrei avuta non leggiere fperanza d'illuminarla fenza molto travaglio, e d'ottenere l'affenfo, e l'approvazione de' matematici. Ma non sì tofto incominciai a leggere le varie, e sì difcordi differtazioni, che nel corfo di più di feffant' anni fonofi colle ftampe al pubblico efpofte, che forprefo da giufto timore, che mi fpogliò interamente d'ogni coraggio, fui per abbandonare l'imprefa nell'atto fteffo dell'intraprenderla.

Ne tanto mi fpaventava la moltitudine delle fcritture quà, e là in parecchi libri difperfe, che in fine altro non richiedeva, fe non fe diligenza, tempo, e fatica: quanto l'ofcurità, e la confufione, da cui e l'idea delle forze vive, ed ogni ra-

 gione,

gione, ed ogni rifpofta miferamente fembravanmi ricoperte. È per quel, ch'alla natura s'attiene di cotai forze, non folo non mi riufciva di rinvenirne in chi che fia una chiara, e precifa idea; ma di più parevami, che ciafcuno con infinita diverfità a fuo fenno le diffiniffe. Chi pel nome di forza viva intendea quella forza, onde il corpo in movimento è dotato, chi quella, per cui il corpo in effetto fi muove. Altri diceva la forza viva effere una facoltà di paffare in un dato tempo uno fpazio determinato, o di chiudere elaftri aperti, e di fcavar foffe nella materia cedente, o di follevar il corpo vincendo della gravità contraria l'impedimento. Le quali diffinizioni tutte, e perchè difcordi, e perchè ampie, o riftrette più del dovere, mi fembrava, che materia fomminiftraffero all'oftinate contefe, non ifchietti principj atti a rintracciare la verità. Men dell'altre mi difpiaceva l'idea, che ne forma nella differtazione della vera nozion delle forze vive il Sig. Giovanni Bernoulli, che fovente con fomme lodi dovremo in queft'Opera nominare, dicendo non altro effer la forza viva, fe non una facoltà d'agire. Tuttavolta il non fapere, di qual genere d'azione fi favellaffe, non permettea, che dalla mia mente fi partiffe del tutto la confufione.

Sopra di così fatte idee incerte, torbide, e ofcure effendo fondate quelle ragioni, e rifpofte, onde l'una, o l'altra mifura delle forze vive fi ftudiavano i filofofi di ftabilire, o d'abbattere, può ognuno formar giudicio, quanto acconcie foffero a comporre la controverfia, e a difcuoprire la verità. Io per certo nel leggerle, e nel ponderarle con attenzione fui d'avvifo, che in effe il vero col falfo, la fcienza coll'opinione, le ipotefi colle tefi non di rado fi confondeffero, e che foventemente ciò, che dimoftravafi convenire ad un cafo particolare, s'eftendeffe fenza cautela, e fi prendeffe come proprietà univerfale. Per le quali cofe confefferò ingenuamente, ch'altro non apprefi coll'attenta lezione, e col lungo ftudio, fe non fe di conofcere, che nulla io non fapeva in cotal materia, e che fin allora avea malamente i miei penfieri impiegati.

A così ftretto paffo condotto, dubbiofo io viveva, e fofpefo, ne fapea determinar il configlio, al quale appigliarmi. Speffe volte mi cadeva in penfiero d'abbandonare interamente quefta così difficile, ed ofcura quiftione, e di rivolgere i miei

ftudj

ſtudj ad altre materie con iſperanza di raccoglierne maggiore frutto, e profitto. Ma per altra parte rincreſceami non poco, di laſciar inutilmente perire le tante, e non leggiere fatiche, che fin allora avea ſoſtenute. Laonde eſſendo io ad evidenza perſuaſo, che la preſente controverſia tratta fuori non ſi ſarebbe giammai dell' oſcurità, e delle tenebre, in cui giaceva, quando non ſi rinveniſſe una chiara, preciſa, e diſtinta idea della forza viva; ad eſſa frequentemente col penſier ritornando ſtudiavami di diſporre, e di rettificar le mie idee, e d' allontanare dalla mia mente ogni confuſione, ed oſcurità. In queſta guiſa a poco a poco, e con infinita pazienza ogni coſa minutamente conſiderando, parvemi alla fine d' aver diſgombrata ogni nebbia, e d' aver conoſciuto con chiarezza altro non eſſer la forza viva, ſe non quella facoltà, che nell' inerzia del corpo moſſo ſi concepiſce di reagire con una determinata reazione contro all' azion della forza morta, finchè egli alla quiete ſi riconduce. Della qual diffinizione ogni minima particella viene nel primo Dialogo dichiarata con diſtinzione. Quindi imparai, che la forza viva dev' eſſer proporzionale all' azion della forza morta, da cui o prodotta viene, o diſtrutta. Al nuovo lume, che ſi preſentò alla mia mente, ripreſo coraggio richiamai l' abbandonate meditazioni, e m' accinſi all' impreſa di trattar la materia con fiſica evidenza, e certezza.

Ad ottener queſto fine avviſai eſſere di meſtieri di ſeparar le coſe certe dalle dubbioſe, e le dimoſtrate da quelle, che ſono ancora da dimoſtrarſi. Le leggi, che riſguardano le forze continuamente applicate, e la comunicazione del movimento, ſono ſtate concordemente da geometri ricevute, e non appartenendo alla controverſia preſente penſo, ch' in dubbio non s' abbiano a richiamare. Tra i molti ſcrittori, ch' hanno delle forze vive trattato, non ho ritrovato veruno, cui ſia caduto in penſiero, di non ricevere con tutta l' ampiezza ſua la teoria della comunicazione del movimento; ma queſta ſuppoſta s' è ſtudiato ognuno di dedurre o per l' una parte, o per l' altra nuovi argomenti. Non così è avvenuto delle forze continuamente applicate. Imperciocchè parecchi, cui piaceva di militar ſotto l' inſegne de' carteſiani, non ſapendo in qual guiſa ſciogliere le ragioni, che da cotal teoria per l' altra parte ſi producevano, ſonoſi appigliati al conſiglio d' atterrar la teoria dicendo,

cendo, che quelle leggi vagliono per rapporto alla gravità, non per rapporto ad altri generi di forze, come alla elasticità, ed alla tenacità della materia cedente. Per la qual cosa sono stato costretto ad esaminare l' obbiezioni loro, mostrando e colla sperienza, e colla ragione, che l'ordinarie leggi delle forze continuamente applicate regolano non meno i moti provenienti dalla gravità, che quelli, i quali nascono dall'elasticità, o dalla resistenza della materia molle, e cedente: la qual verità nel secondo, e nel terzo Dialogo è dichiarata.

Siccome da due fonti derivano le ragioni, ch' in copia per l'una parte, e per l'altra soglion prodursi; così in due parti ho giudicato a proposito di distribuire le mie ricerche; pensando in prima agli argomenti dedotti dalle forze continuamente applicate, indi a quelli, ch'alla comunicazione del movimento appartengono. E quanto alla prima parte mi venne subitamente innanzi al pensiero quella ragione, che dotti seguaci del Leibnizio fondavano sopra la proporzion delle fosse scavate da' corpi cadenti nella materia molle, e dal numero degli elastri, i quali o chiudendosi toglievano, o aprendosi donavano alle masse velocità. Senza disaminare di qual robustezza fosse l' argomento dotato, mi posi a considerar le risposte, di cui per isnervarlo si serviva la parte opposta. Esse comunque diverse fussero, anzi pur contrarie, si fondavano tutte sopra il tempo, in cui scavansi le fosse, e gli elastri si serrano, o si dilatano. Io dirò schiettamente, che non mi tenni per cotai risposte appagato; e in brieve spazio mi resi certo, che i tempi, di cui abbisognavano, non erano ne veri, ne ragionevoli. E ciò chiaramente viene nel quarto Dialogo dimostrato.

Riprovate per tanto le vecchie risposte passai a considerar tutti gli argomenti presi non solo dalle nominate forze d'elasticità, e di tenacità, ma ancora di gravità, di cui e l'una parte, e l'altra in gran copia servivasi, e dopo matura, e posata riflessione m'avvidi, che tutti cadevano in una chiara, e manifesta petizion di principio. Conciossiachè i cartesiani tacitamente supponessero, che le minime azioni delle forze morte fossero in ragion composita delle forze morte, e dei tempicelli; all'opposito i seguaci del Leibnizio le facessero proporzionali alle forze morte, e agl' infinitesimi spazj. Io non ho dubbio alcuno, che se la misura dell'azioni si debba prender dal

tem-

…mpo, la forza viva non sia come la quantità del movimento; all' opposito se la misura dell' azione dallo spazio prender si voglia, la forza viva non sia come il prodotto della massa nel quadrato della velocità. Per la qual cosa il supporre o l' una, o l' altra misura dell' azione, è un suppor quello, di che si dee quistionare. Che poi gli argomenti fin or prodotti da cotal fallacia sieno viziati, il quinto, ed il sesto Dialogo patentemente il dichiara.

Poichè per me medesimo, e col mio solo studio mi resi certo, che nulla provano le ragioni fin ora da Scrittori ingegnosissimi ritrovate, a durissime contingenze, e strettezze conobbi d' essere un' altra volta condotto, non recandomi verun giovamento le molte meditazioni, e le passate fatiche. Vedea, che la quistione erasi portata ad un punto più preciso, e sottile, cioè a dire da quale de' due elementi del tempo, ovver dello spazio debba misurarsi l' azione? Ma a ritrovare così fatta misura conobbi esser necessario di stabilire nuovi principj, d' usar nuovo metodo, di creare nuovi argomenti. Io non mi son ritirato d' entrare in prova, e in cimento; nè so se sia soverchia lusinga lo sperare, di non aver senza frutto impiegate le molte, e travagliose meditazioni. Ma se la mia Opera sia riuscita a laudevole fine, il conoscerò dall' approvazione, o dalla disapprovazione de' matematici.

Pertanto nel fine della quinta Giornata considerando, che ne' movimenti, i quali hanno origine dalle forze continuamente applicate, vagliono due leggi, l' una delle quali risguarda il tempo, l' altra lo spazio, si dee unicamente investigare, qual di queste due leggi sia la principale, qual contenga la misura dell' azione, e l' egualità tra la cagione, e l' effetto. Onde non versando la quistione intorno alla verità delle leggi, nella quale tutti convengono, ma intorno al primato, e alla preminenza, di cui niuno fin ora ha scritto, o pensato, essa non si trattiene dentro i limiti della fisica, ma oltrepassandoli entra in parte, dove ha giurisdizione la metafisica. Quindi essendo pur di mestieri, che i principj secondi sieno di quel genere, a cui appartien la quistione, non saranno i principj fisici sufficienti, ma converrà i metafisici chiamare ancora in soccorso. Quai sieno cotai principj, e quale il metodo sicuro per adoprarli, nel citato luogo espongo distintamente.

Indi

Indi del nuovo metodo, e de' novelli principj servendomi, nella Giornata settima, e ottava propongo al giudicio delle persone scienziate non più pensati argomenti, i quali alla legge dello spazio danno la preferenza, e fanno vedere, che l'azioni vogliono misurarsi per le potenze, e per gli spazj, e che per conseguenza le forze vive a' prodotti delle masse ne' quadrati delle velocità sono proporzionali. Per le quali dimostrazioni si fa palese, ch' i seguaci del Leibnizio se non più esatti, almeno stati sono più fortunati de' Cartesiani.

Soddisfatto delle conseguenze, che dalle leggi delle forze continuamente applicate per mezzo de' principj metafisici avea dedotte, passai a considerare quelle ragioni, che dalle leggi della comunicazione del movimento o per l'una parte, o per l'altra si raccoglievano. E poichè vedea farsi forti i Cartesiani con sì fatta teoria, e servirsi di parecchie ragioni, che vantavano per invincibili; ad un giusto esame le sottoposi, e giudicai ricevere una sufficientissima spiegazione. Appresso alle ragioni prodotte da' seguaci del Leibnizio mi studiai di dar quel peso, che meritano, e nulla più. Tutto ciò nelle due Giornate nona, e decima si vede distintamente eseguito.

Non sarei stato però di questo solo pago abbastanza, quando non avessi trovato metodo per istabilire quale fusse la principal legge, che regolasse la comunicazione del movimento, e dipendesse dalla misura dell'azione, e dall' egualità tra la cagione, e l'effetto. A quest' uopo m' è stato necessario d'avanzare la teoria della comunicazione del movimento, non essendo bastanti le verità conosciute a fornir d'un criterio valevole al mio disegno. Per tanto m' è riuscito di stabilir generalmente le leggi, le quai s' osservano in una spezie di comunicazione di moto fatta per mezzo d'un vette, la quale è stata prima considerata in qualche caso particolare dal Sig. Giovanni Bernoulli. In oltre ho ritrovato un metodo, il qual m' ha insegnate le leggi, che dalla natura si custodiscono in parecchi urti indiretti di tre, o più corpi. Estesa la teoria, ed ampliata per cotal guisa ho chiamati come dianzi in ajuto i principj metafisici, da' quali ho imparato, la legge principale, e dipendente dalla misura dell'azione esser quella, che risguarda i prodotti delle masse ne' quadrati delle velocità. La qual conseguenza con quella maravigliosamente s' accorda, che è stata dedot-

dedotta dalle leggi delle forze continuamente applicate. E con tali meditazioni nell' undecimo Dialogo contenute si pone a tutta l'Opera compimento.

Poichè io ho divisata la serie di quelle idee, e di que' pensamenti, che m'ha al termine delle mie brame condotto; cosa ch' ho giudicata per l'una parte non disutile alle persone studiose, per l' altra molto acconcia alla chiarezza della mia opera: debbo render ragione, perchè lasciando il parlar seguito, che alle cose dottrinali molto conviensi, amato abbia di distendere in dialogo i miei ritrovati. Siccome le cose scritte intorno al suggetto delle forze vive erano non solo varie, e diverse, ma ancor discordi, e contrarie, così difficil cosa era con un metodo preciso, e stretto poterle tutte abbracciare. Laonde fu di mestieri, che d'una maniera di parlar mi servissi, la quale non richiedendo un ordine rigoroso mi concedesse la libertà d' introdurre qualche opportuna digressioncella. La qual libertà è non solamente permessa, ma ancor richiesta dalla natura del dialogo, nel quale gl' interlocutori or opponendo, or domandando, or qualche improvvisa riflessione esponendo, danno occasione, che parola si faccia di varie, e diverse materie sovente ancor lontane dall' argomento.

Quanto a' personaggi, che dialogizzando favellano, non altro dirò, se non che ho amato meglio di partirmi dall'esempio del Galileo, il quale in bocca di persone viventi ha messi i suoi ritrovati, e d'introdurre anzi persone finte, e ideali: perciocchè queste non possono, siccome quelle, far querela, che le rappresenti sotto un aspetto, che lor non piaccia, e che le faccia dir cose, che non avrebbero pensate forse giammai. Sotto il nome, e la persona di Lelio io nascondo me stesso; mentre colla sua lingua espongo i veri miei sentimenti. Io suppongo, che questo personaggio entri a parlar delle forze vive dopo averle profondamente, e con ogni accuratezza disaminate: perlochè egli ha tal capitale di scienza, che può con franchezza soddisfare a' dubbiosi, e rispondere agli opponenti, e produr molte cose nuove, e non pensate da altri. Gli altri due personaggi Nestore, e Cesare li fingo provvedutissimi della geometria, e dell' analisi. Il primo si mostra alcun poco impegnato per l' opinioni degli acutissimi inglesi, e per quel che spetta alle forze vive dubbioso interamente, ed incerto;

il fecondo amante più del dover del Cartefio, e della mifura delle forze vive, che fuolfi attribuire a quell' autore dottiffimo. L' uno, e l' altro però ha il bel pregio della docilità, ed è pronto a cedere alla forza della ragione, quando dopo una diligente, e pofata difamina gli fembri effere convincente. Se quefto carattere fi confideri, di cui li fingo dotati, non riufcirà ftrano, s' effi finalmente la fentenza abbraccino, che vien da Lelio con nuove ragioni provata.

Non fo, fe debba temere d' effer accufato di prefunzione, perchè poco, o niun pefo appreffo di me avendo le molte ragioni apportate sì da' leibniziani, come da' cartefiani, penfi d'aver con quelle, ch' io mi fono formate, compofta la quiftione, e decifa A chi per avventura di cotal vizio mi condannaffe, non altro rifponderò, fe non che tal rifpetto, anzi timore ho del pubblico, che non ardirei di metter fotto a' fuoi occhi, e alla fua cenfura una fcrittura anche minima, in cui non fi conteneffe fe non ciò, ch' in altre opere diltefamente fi legge. A me fembra, che la repubblica degli fcienziati debba rimirar con indifferenza per non dir con difprezzo un libro, che ripete unicamente gli altrui ritrovati, ne contiene una qualche nuova fcoperta. Per la qual cofa fe, alle forze vive penfando, non aveffi avvertita qualche fallacia negli altrui raziocinj, e ritrovate non aveffi ragioni nuove, mi farei ritirato dallo ftampare, perfuafo d' incontrar la giufta taccia di temerità, e di meritar la cenfura, o piuttofto il difprezzo de' letterati.

Non negherò d' effere in buona fperanza, d'aver finalmente tratta fuor delle tenebre la verità. Nonoftante effendomi fin ora adoperato in un argomento, in cui molti, e grandiffimi uomini caduti fono in paralogifmo (giacchè non potendo l' una, e l' altra fentenza effer vera, è di neceffità, che alcuni grand' uomini abbiano errato) l' altrui efempio m' inftruifce, e m' infegna di tener quel folo per certo, che viene dalla repubblica degli fcienziati univerfalmente approvato. Ma il timore di ricever difapprovazione non penfo, che m' abbia a ritirare dal dare alla luce i miei penfamenti: perciocchè debbo aver maggior riguardo alla pubblica utilità, ch' al mio particolare intereffe. Se nelle ragioni, ch' apporto, non farà fcoperto paralogifmo veruno, avrà una volta fine quefta contro-

troverſia sì vecchia con gran vantaggio delle ſcienze, e degli ſcienziati. Che ſe verrà un qualche paralogiſmo manifeſtato, non ſolo non riceverò danno alcuno, ch' anzi ſarò liberato d'errore riconoſcendo, che la quiſtione rimane nell' incertezza di prima.

Ben è vero però, che quand'anche abbia avuta la buona ſorte d'eſporr'alla luce la verità, non ſolamente penſo, ma ſon ſicuro, che molti inſorgeranno a combatterla, e a contraddirle. Perciocchè tra tanti, che hanno in cotal materia con calore, ed impegno penſato, e ſcritto, egli è impoſſibil coſa, che tutti ſubitamente i pregiudicj depongano, e le nuove ragioni per legittime riconoſcano. Per tanto io mi dichiaro, che non mi ſarà punto grave il vedere, che da molti ſieno le mie dottrine impugnate. Solamente priego ciaſcuno a conſiderare il coſtume, che ho ſeguito ſempremai, mentre per compiere la mia opera ſono ſtato coſtretto ad eſaminare gli ſcritti altrui. Ho bensì combattute quelle dottrine, che non mi ſon parute conformi alla verità. Ma degli autori ho parlato ſempre con riſpetto, e con laude profeſſando d'aver per loro quell' altiſſima ſtima, che coll' ingegno, col ſapere, co' ritrovati nuovi ſonoſi meritata. Però s'alcuno non convinto, di quant' ho ſcritto, vorrà il mio errore moſtrarmi, io lo prego di non allontanarſi punto dal dottrinale.

Acciocchè poi ad ognuno ſia ſcoperta la mia maniera di procedere, e d'operare, ſin da queſto giorno mi dichiaro, che ſe per ſorte uſciſſero ſcritture ad impugnare la mia teoria, io non prenderò la penna in mano per iſcrivere, ſe non in due ſole occaſioni: cioè a dire, quando ſi toccaſſe alcun punto, che per me non fuſſe ſtato a ſufficienza ſpiegato, e biſogno aveſſe di maggiore riſchiaramento, e quando per l'apportate ragioni rimaneſſi convinto d'eſſer caduto in paralogiſmo. Imperciocchè nella prima occaſione mi ſtudierò d'eſporre la coſa al pubblico colla neceſſaria chiarezza: nell'altra io confeſſerò con iſchiettezza il mio errore; giudicando non recar biaſimo ad uomini ancor dottiſſimi, nel qual numero io non mi pongo, l'eſſere a paralogiſmi ſoggetti, ma recarlo grandiſſimo il difendere con oſtinazione un errore paleſe, e omai conoſciuto. Nell' altre occaſioni tutte io cuſtodirò un inviolabil ſilenzio, non per diſprezzo, con cui ſia per riguardare l'altrui ſcritture, dal qual

vizio ſpero d' eſſere lontaniſſimo, ma perchè il romperlo mi graverebbe d' una cura inutile, e faſtidioſa. Concioſſiachè s' io aveſſi il torto, le riſpoſte non mi porrebbero dalla parte della ragione. Che ſe ho in fatti diſcoperta la verità, eſſa ſaprà ſoſtenerſi per ſe medeſima, e far in guiſa, che ſenza nuove repliche tutto il mondo letterato la riconoſca.

GIOR.

GIORNATA PRIMA.

INTERLOCUTORI

Lelio, Nestore, Cesare.

N. NOn posso spiegarvi quanto grande sia stata per me la lentezza de' passati mesi, ne' quali per la vostra assenza non erami permesso di trattenermi con voi in questa picciola sì, ma sceltissima libreria, ragionando di cose per se medesime dilettevoli, e utilissime agli usi umani.

C. Così è; e qua ci siamo portati per renderci sicuri del vostro arrivo; giacchè eravamo tra speranza, e timore.

L. Confesso, o Signori, che in quella solitudine, ove sì rade volte esco dal mio studio, altra noja io non provava se non se quella d'esser privo della letteraria vostra conversazione; nella quale imparo pur qualche cosa di buono, e di sustanziale: là dove nell'altre non odo favellare fuorchè di cose frivole, e vane, dietro a cui, che si perdano tanti intelletti non posso pensarlo senza compassione. Io sono arrivato appunto questa mattina, e da qui innanzi spero, che avrete la bontà d'instruirmi siccome per addietro.

N. Ritornato siete opportunamente, perchè io avrei desiderio di ascoltar la vostra opinione intorno alle forze vive, delle quali ne' dì passati ho fatte molte parole col Sig. Cesare. Egli, che, come sapete, ha particolare stima, ed amore per la meritevole, e dotta nazion franzese, e tiene il Cartesio per infallibile, ha preso ad instruirmi sotto la sua scuola, e qualora muovo alcun dubbio intorno a' suoi detti, alza il tuono magistrale, e mi tratta come discepolo caparbio, e ostinato.

L. Ricorrete questa volta a persona, che non può non aver ripugnanza nel compiacervi. Amo troppo sinceramente il Sig. Cesare: e in compiacendovi temerei di rapirgli dal lato uno scolare di tanta speranza, ed insiememente d'incontrare appresso di lui la taccia d'ostinazione.

C. In somma voi mi fate intender con grazia, che leibni-

ziano

ziano fiete, e che difcordate in quefta materia dal gran Cartefio. Non poffo diffimularvi la mia maraviglia; perchè dall' un canto fempre ho avuta per infuffiftente l' opinione del Leibnizio; dall' altro vi ho fempre conofciuto per uomo, che all' autorità mai non cede, ma folo alla ragione dimoftrativa. Però mi nafce un defiderio grandiffimo d' udire come penfate, e quai fieno quelle ragioni, che v' hanno alla parte delle forze vive condotto.

L. No, Signori, non mi dichiaro leibniziano, anzi nella maggior parte delle cofe a quell' uomo quantunque grandiffimo, ed a' feguaci fuoi fono interamente contrario: febbene non approvo ne pure l' opinion del Cartefio.

C. E a qual delle due fentenze al fin vi appigliate? fembran oppofite così, che l' una effer debba vera, l' altra falfa neceffariamente. Forfe, come è ftato per talun fofpettato, la giudicate una frivola controverfia di voce?

L. Nulla meno. Di quefta materia appunto ho a bell' agio meditato nella mia folitudine di campagna, e ne ho le fpezie sì vive, che nulla più. Ma per compiutamente trattarla farà di meftieri fpendervi più giornate; effendo la quiftione vaftiffima, e ripiena di belle fpeculazioni, e di raziocinj fottili. E poichè quefta mattina fono ftato in viaggio, io configlio, che differendo a domani i noftri congreffi, ftabiliamo al prefente l' ordine, che in effi vuolfi tenere.

N. Ma quando far ciò fi poffa fenza incomodo voftro, non mi potrefte fpiegare, e diffinire il fuggetto, di che fi tratta? acciocchè poffa ne' dì feguenti, dopo avervi penfato, comprender meglio ciò, che direte.

L. Come vi piace: quantunque con fomigliante domanda non v' avvediate di negarmi per quefta prima giornata quella libertà, che v' ho chiefta. Ma è bene, che prendiam la cofa da più alti principj, e indietro portandoci perveniamo fino alla forza d' inerzia, efaminando prima di tutto, che cofa ella fia.

C. Sembrami quefto un incominciare dalle due uova il racconto della guerra trojana.

L. Il cominciar da sì alto farebbe viziofo, quando non giovaffe alla chiarezza per modo alcuno: ma fe ciò neceffario fia ad aver le giufte precife idee, fenza le quali fi correrebbe rifchio d' intorbidar la materia, anzi che rifchiararla, non farà

ripren-

riprensibile, ma degno d' approvazione, e di lode. Qual' idea dunque vi si sveglia in mente, qualor concepite forza d' inerzia?

C. Io m' immagino una forza, ovvero una resistenza risedente nel corpo, qualunque siasi, per mezzo della quale resiste, e reagisce contro all' altre forze, o resistenze, che sono applicate a cangiare lo stato suo. Perlochè, siccome avvisa il dottissimo Ermanno, devesi concepire una spezie di lotta, e di contrasto tra la forza agente, ed il corpo, ovvero la sua inerzia resistente, qualora lo stato del medesimo corpo si va cangiando.

L. Io non m' oppongo per niun modo a così fatta spiegazione, purchè non si porti più innanzi del dovere la somiglianza tra questa, che si domanda forza d' inerzia, e le altre forze valevoli a mutar lo stato del corpo. Un corpo, qualunque siasi, dee conservare quello stato di quiete, o di movimento, in cui si ritrova, ne può alterarlo giammai, quando non v' abbia una cagion sufficiente di così fatta alterazione.

N. Non vi ha verità, che con maggiore schiettezza si deduca dal principio della ragion sufficiente. Conciossiachè il corpo dallo stato, in cui ritrovasi, può passare ad infiniti altri stati di maggiore, e di minore velocità, e per infinite direzioni; ai quali stati per se medesimo è indifferente: dunque dallo stato, in cui è, ad alcun altro stato non può passare, quando non v' abbia una cagion sufficiente a determinare qual debba essere tra gl' infiniti quello, in cui novellamente il corpo si metta. Quindi deriva per legittima conseguenza, che niun corpo può passare dallo stato presente ad altro stato, quando obbligato non ne sia da una cagione, ch' abbia corrispondenza col cangiamento, che accade.

L. Ciò presupposto possiamo concepire in qualunque corpo una proprietà, la qual non permette, che si faccia cangiamento nello stato del corpo, quando non v' abbia una cagione al cangiamento proporzionale. E questa proprietà, o facoltà, che vogliamo dirla, si è quella, che dalla più parte vien chiamata dopo il Keplero forza d' inerzia, e dal Newton forza insita, e passiva. Ma di grazia la parola di forza, che s' adopra a dinotare sì fatta proprietà non vorrei, che ci facesse credere, che tra essa, e l' altre forze, che sono in natura, vi sia una

somi-

somiglianza perfetta, e una analogia squisitissima. La somiglianza si ravvisa solamente nelle voci, ma non nelle cose, che sono dissomigliantissime. Le altre forze sono valevoli di produrre, o almen d'estinguere il movimento: questa non è possente ad impedirlo, e molto meno a farlo nascere. Le altre si sforzano sempre di cangiar lo stato de' corpi: questa lo conserva, ne vuol che si cangi se non da una cagione proporzionale. In somma per cotai voci forza d'inerzia altro non s'indica, se non questo, che a cangiar lo stato del corpo è necessario, che vi s'impieghi una causa proporzionale al cangiamento, che dee seguire. Così formata l'idea, credo, che saremo apparecchiati a concepire distintamente, che cosa sia forza viva.

C. Ma che giudicio fate dell'espressioni, di che si servono comunemente gli autori? che la forza d'inerzia combatte, e vien a lotta coll'altre forze applicate a mutar lo stato del corpo; che la sua azione, o reazione che vogliam dirla, è perfettamente eguale alle azioni loro, ed altre somiglianti: di più ch'essa è sempremai proporzionale alla massa, o quantità di materia.

L. Comincierò da questa ultima cosa, la quale è per se evidente, discendendo immediatamente dall'idea, che studiato mi sono di far nascere dell'inerzia. Chi non vede, che tanto maggior causa richiedesi a cangiar lo stato del corpo egualmente, quanto è maggiore la quantità di materia, di che è composto? dunque cotal facoltà, che concepiamo nel corpo di non cangiare stato, quando non v'abbia una causa proporzionata, tanto sarà maggiore, quanto è maggior la sua massa, e conseguentemente sarà alla massa proporzionale.

Quanto all'altre espressioni io nè le condanno, nè le approvo; o piuttosto le ricevo siccome concetti matematici atti a discuoprir con più chiarezza la verità, e a formar più speditamente le dimostrazioni. Conciossiachè impiegandosi la causa a produr il movimento nel corpo, io concepisco una reazion nell'inerzia proporzionale all'energia della causa: alla qual reazione corrisponde il cangiamento dello stato, nel quale vuolsi altresì computare la quantità della massa. Ma torno a ripeterlo; cotal reazione non ce la figuriamo somigliante all'altre azioni; perchè non è valevole di produr, o d'estinguer moto,

floro, ne fa altro fuorchè di non permettere, che nel corpo ſi cangi ſtato, quando una cagione proporzionale non lo coſtringa.

N. V' aſſicuro, che non prima d' ora ho formata giuſta, e preciſa idea della forza d' inerzia: tante voci, che comunemente s' uſano per analogia all' altre forze, fanno naſcere dell' idee ſecondarie, che confondono, e rendono torbida, e guaſta l' idea principale. E perciò non biſogna niente concedere all' autorità d' uomini ancor grandiſſimi, ma il tutto eſaminare col proprio intelletto, e far buon uſo della propria ragione.

L. Stabilita la giuſta idea della forza d' inerzia, paſſiamo a parlare di quelle cagioni, che nello ſtato de' corpi producono cangiamento. Queſte comunemente ſi appellan forze, come la gravità, la elaſticità, la tenacità, ed altre ſimili; alcune delle quali ſon poſſenti a cangiare ſtato tanto coll' accreſcere, quanto col diminuire il movimento, e queſte il nome di forze più propriamente ritengono: altre ſon atte a cangiare ſtato col diminuir ſolamente la velocità, e queſte più veramente ſi chiamano reſiſtenze. Ma cotal diſtinzione al caſo noſtro monta pochiſſimo, adattandoſi tutto ciò, che delle prime diraſſi, ancora all' altre ſenza difficultà. Quello, che dobbiam ponderare, ſi è, ſe tantoſto che una di cotali forze, come la gravità, o l' elaſticità, è applicata ad un corpo, abbiaſi una cagion ſufficiente di mutazione di ſtato.

C. Io non ne dubito punto. E che altro può richiederſi all' effetto, che la cagione?

L. Non dubito, ſe ad aver l' effetto altro ſi richieda, che la cagione; dubito, ſe la gravità, l' elaſticità, ed altre ſimili forze ſieno ſufficienti cagioni della mutazion dello ſtato.

N. Quando non ſieno impedite, sì certamente.

L. Dunque per voi ſi riconoſce, che in caſo d' impedimento, cotali forze ſaranno applicate al corpo, ne però ſaran valevoli a produr cangiamento di ſtato: dunque eſſe non ſono la vera, e propria cagione di cotal cangiamento: e che altro dunque richiedeſi per aver la cagione della mutazion dello ſtato?

N. Richiedeſi, che non v' abbia impedimento di ſorte alcuna: come a cagion d' eſempio, che la gravità non ſia impedita da un piano ſottopoſto al corpo, che non lo laſcia diſcen-

dere; che l' elaſticità d' una molla non abbia incontro una fermiſſima muraglia, che non permette al corpo l' andar innanzi.

L. Tutto bene: ma il Sig. Ceſare ha poco innanzi inſegnato, che qualora vi abbia la cagione, neceſſariamente dee ſeguire l' effetto: dunque intanto l' impedimento può fare, che non ſegua l' effetto, in quanto può fare, che non vi ſia la cagione all' effetto corriſpondente.

N. Non v' ha dubbio, che l' impedimento fa, che la gravità, l' elaſticità, ed altre ſimili forze non entrino in eſercizio, o in azione, e per mancanza d' azione non ſi ottiene il cangiamento di ſtato. Onde in caſo d' impedimento altro non ſi concepiſce, che la ſola preſſione eſercitata dalle predette forze contro all' oſtacolo: ma rimoſſo l' impedimento s' ottien ſenza indugio l' azione delle medeſime, che è la vera cauſa della mutazion dello ſtato.

L. Tre coſe dunque fa di meſtieri diſtinguere diligentemente l' una dall' altra; forza, come di elaſticità, di gravità ec., azione di queſta forza, cangiamento dello ſtato prodotto da queſta forza. Finchè non ho altro, che la forza applicata al corpo, ovvero la preſſione, io non intendo cagion ſufficiente di variazione di ſtato; perocchè ſi può avere una forza applicata al corpo per tutta l' eternità non accadendo una minima variazione, ſiccome in caſo d' impedimento, ſecondo l' avvertimento del Sig. Neſtore. E cotai forze ſon deſſe appunto, cui il Leibnizio diede il nome di forze morte. Ma toſto che io concepiſco l' azione, che non è altro, ſe non una continua, e ſucceſſiva applicazione della potenza ad ogni punto del tempo, ovver dello ſpazio, concepiſco parimente la cagione ſufficiente della mutazion dello ſtato, che è il vero, e neceſſario effetto di tal' azione.

N. In ſomma voi ſtabilite, che la vera, e rigoroſa cagione della mutazion dello ſtato non è la gravità, o l' elaſticità, ovvero le lor preſſioni, ma le azioni loro. La qual coſa ſembrami evidentiſſima: perocchè il cangiamento dello ſtato può creſcere anche in infinito; dunque deve eſſer proporzionale ad una quantità, che all' infinito poſſa aumentarſi, ſiccome all' azione interviene. In qualche ſenſo però ſi potrà chiamare la gravità ancor cagione, in quanto l' azione per eſſa eſercitata da

da lei proviene: e però nella misura della azione v'entrerà, siccome elemento, la gravità, od altra forza.

L. Senza fallo. Se non v'è discara una chiarissima analogia delle tre cose, che abbiam distinte, eccovela presa dalla geometria. All'estremità della linea A B colloco a squadra la

retta A C. Fin ora io non intendo altro, che la retta A C insistente sovra la retta A B: la fo fluire sovra la stessa retta A B, ed oltre la retta A C concepisco il suo flusso: con sì fatto flusso si genera la superficie rettangola A D, la quale non alla linea A C solamente, ma al suo flusso ancora riesce proporzionale.

Alla linea C A insistente sovra la A B debbo paragonare la gravità, o la pressione applicata al corpo. E siccome nel primo caso non intendo sin ora altro, che la linea C A; così non intendo sin ora altro nel secondo se non la gravità, e la pressione. Al flusso della retta C A corrisponde l'azion della gravità; e siccome concepito il flusso intendo alcuna cosa di più oltre la retta C A; così concepita l'azione intendo alcuna cosa di più oltre la gravità, e la pressione. Alla superficie rettangola generata col flusso della linea vuolsi mettere a riscontro la mutazion dello stato seguita nel corpo: e siccome il rettangolo generato è proporzionale non alla linea C A, ma al suo flusso: così la mutazion dello stato seguita nel corpo è proporzionale non alla gravità, ed alla pressione, ma bensì all'azione. Ho scelto una linea costante, ed una forza costante, qual si suppone la gravità: per altro il paragone non verrebbe meno, quando anche si assumessero variabili, generando in tal caso il flusso della linea non una superficie rettangola, ma una superficie curvilinea.

N. Comparazione maravigliosa, la quale con vivace luce ogni nebbia scioglie, e dirada. La superficie rettangola generata dal flusso è proporzionale alla linea fluente C A, ed alla A B, per cui si fa il flusso: dunque il flusso è in ragion com-

C 2 posita

pofita della linea fluente, e dello fpazio, fovra cui fegue. La comparazion pertanto vorrebbe, che l'azione foffe proporzionale non meno alla forza, ch' entra in azione, che allo fpazio, per cui fi fa l'azione.

L. Non porto il paragon tanto oltre; perchè, fe l'analogia fi voleffe ricevere non come una probabile congettura, ma come un raziocinio dimoftrativo, la controverfia farebbe interamente decifa, e permeffo ci farebbe fin dal primo giorno di troncar il filo a' noftri ragionamenti Ciò, che abbiam detto del cangiamento di ftato proporzionale all'azione, che s efercita, vuolfi intendere, quando abbiavi una forza fola agente. Per altro fe ve n'ha due, o più, fa di meftieri confiderare, fe le azioni loro fieno cofpiranti, ovvero contrarie. Se cofpiranti fono, la mutazione di ftato è proporzionale alla fomma di tutte quante le azioni, la qual cofa è agevole a concepire: ma fe fon contrarie, il cangiamento di ftato è proporzionale alla differenza loro, la qual cofa, acciocchè meglio s' intenda, io dichiarerò col raziocinio feguente. Pongo due forze contrarie A, B, la prima maggiore, l'altra minore: quefte applicate ad un qualunque corpo, fe agifcano, eferciteranno due azioni contrarie A maggiore, B minore, e fi cangerà lo ftato del corpo. L'azione della forza maggiore A farà impiegata in due effetti; il primo farà di foftenere l'azion minore, e contraria della forza B, l'altro di produr il cangiamento di ftato: dunque l'azion maggiore della forza A eguaglierà l'azion minore della forza B, ed infieme la mutazione di ftato; e per confeguenza la mutazione di ftato farà proporzionale alla differenza delle due contrarie azioni. Ed in ciò tra le due parti oppofte non vi può effer contefa.

N. Nelle limpidiffime idee fin ora per voi fpiegate fi contiene la legge della continuità indicata primamente da Galileo, indi meffa in perfetta luce dal Leibnizio due uomini fommi, a cui pochi fi vogliono porre eguali. Cotal legge nella noftra materia domanda, che un corpo non fi trasferifca da uno ad altro ftato fenza paffare per tutti quanti gli ftati intermedj. Quefto verificar fi deve fecondo l'efpofta dottrina: perciocchè l'azione della forza effendo in prima nulla, va crefcendo per tutti i gradi fino ad una determinata grandezza: in quella guifa, che il fluffo d'una linea va a poco a poco per

tutti

tutti i gradi aumentandosi: dunque siccome nel generarsi col flusso d'una linea una superficie si vien passando per tutti i gradi intermedj; così nel cangiarsi lo stato del corpo per l'azione d'una potenza per tutti i gradi di mezzo similmente si va passando.

C. La maniera, onde prima concepiva così fatte cose, era alquanto diversa dalla vostra, ma non in sustanza. Io m'immaginava una forza applicata al corpo, ma con un impedimento insuperabile, come a cagion d'esempio un sasso sospeso a quest'arco per mezzo d'un filo. La gravità anche in cotal ipotesi, io diceva, non istà oziosa, e però continuamente il corpo percuote: ma cota' impulsi son resi inutili, e nulli dai continui, e contrarj impulsi d'una forza contraria, ed eguale, qual'è l'elasticità della corda. Se taglio la corda, da cui pende sospeso il sasso, allora la gravità senza ostacolo percuotendo, ed animando il corpo col primo impulso gli comunicherà qualche movimento, indi col secondo, poi col terzo, e cogli altri, che ne' susseguenti istanti di tempo si van replicando, la velocità gli anderà a poco a poco accrescendo, e così passando per tutti i gradi produrrà in esso un movimento finito.

L. Cotal' idea, che vi avete formata in mente, è somigliante all' idea di que' geometri, i quali usando del metodo degli indivisibili concepivano una superficie composita d'infinite linee; la qual' idea ben' adoperata non era disutile: ma per isfuggir ogni pericolo di paralogismo, si è preso consiglio di cangiar quel metodo nel metodo degli infinitamente piccioli, nel quale le superficie finite, si dividono in superficie infinitamente picciole, ma non in linee. In simil guisa voi l'azione della gravità, o d'altra forza morta dividete in infiniti impulsi, uno de' quali si ha, quando anche l'azione è nulla; laddove io un' azione finita non la divido se non se in infinitesime azioni. La qual' idea sembrami più geometrica, e più sicura. Per altro quando bene ve ne serviate, non condanno la vostra maniera di concepire.

Da due maniere di parlare desiderarei però, che v'asteneste per ora. Avete detto, che la gravità va in ciascun istante di tempo replicando gli impulsi suoi, e che cotali impulsi hanno per effetto la mutazione di movimento. Amerei, che più generalmente diceste, che la gravità replica continuamente, e suc-

fucceffivamente gli impulfi, e che per effi vien prodotto il fucceffivo cangiamento di ftato.

C. Ma ella è cofa evidente per la teoria de' gravi cadenti del Galileo, che il numero degl' impulfi dee effer proporzionale al tempo della difcefa, effendofi dimoftrato, che il grave in tempi eguali acquifta nuovi, ed eguali gradi di velocità, i quali non poffono effer prodotti fe non da impulfi eguali della gravità, ficcome effetto dalla fua caufa. Più che evidentiffimo poi fi è, che mutazione di ftato, e mutazione di moto fono voci perfettamente finonime.

L. Non v' adirate di grazia. Quefti faranno punti da difcuterfi ne' noftri familiari congreffi; perocchè per cotali ragioni i Signori Cartefiani fi penfano d' aver trionfato del Leibnizio. Per ora altro non vi domando, fe non che, volendo efaminare i momenti delle due fentenze cartefiana, e leibniziana, prefcindiamo dall' una infieme, e dall' altra: ne ciò fi farebbe, fe vi menaffi buono, che il numero degli impulfi è proporzionale al tempo del movimento, e che la mutazion dello ftato è la fteffa cofa colla mutazione del movimento. E qui mi cade in acconcio di diftinguere tra gli effetti, e quelle quantità, cui mi piace dar nome di confeguenti. Gli effetti provengono per guifa dalle cagioni, che alle fteffe cagioni fono mai fempre proporzionali. I confeguenti comunque dalle cagioni provengono, pure, perciocchè alcuno di quegli elementi s'omette, che la ragion degli effetti compongono, non ferbano delle cagioni la proporzione. La qual diftinzione devefi ricever da chi che fia, da' Cartefiani eziamdio, i quali riconofcono la quantità del movimento ficcome effetto dell' azion della forza morta. Conciofiachè s' io concepifco due forze morte agire contro a due corpi ineguali, i veri, e rigorofi effetti alle cagioni proporzionali, fecondo l' opinion loro, faranno le due quantità del movimento. Beniffimo. Ma le velocità, le quali pure dalle cagioni provengono, ne fono ad effe proporzionali, come le chiameranno? Poichè le diffinizioni di nome fono arbitrarie, a così fatte quantità darò il nome di confeguenti. Pertanto dobbiamo al prefente difputare, ed efaminare, fe dell' azion della forza morta la quantità del movimento fia effetto, ovver confeguente.

N. Guardate che a voi pure non dicafi il noto proverbio; parla

parla alla fine, o Postumo, delle tre caprette. E buona pezza, che andiam ragionando con disegno di esaminare la controversia delle forze vive, e fin ora non le avete pur nominate.

L. Prima di ritrovarle è di mestieri, che un' altra buona parte di viaggio per noi si compia. così quanto più aspettate, tanto più gradite verranno. Poichè si è per noi considerato, che necessaria si è una determinata azione di qualche forza a produr nel corpo un determinato cangiamento di stato; così reputo evidentissimo, che a distruggere il cangiamento, che gia si è fatto, e a ridur il corpo nello stato di prima una egual azion si richiede. E questo è uno degli intelletti, che con verità riceve il noto principio dell' egualità tra l' azione, e la reazione. E ciò si vuol intendere di qualsivoglia forza morta, la quale il cangiamento di stato produca, o distrugga: perchè cosa evidente si è, che tanto a produrre, quanto a distruggere un cangiamento determinato di stato una egual azione si è necessaria.

Essendo soventemente obbligati i Geometri di paragonare l' azione, che produce il cangiamento di stato con quella, che lo distrugge, hanno avvisato, che il far questo senza artificio riuscirebbe d' incomodo, e di fastidio: perciocchè le azioni, che comparare si devono, sono per lo più non solo dissomigliantissime, ma eziandio molto distanti di tempo, fatte spesso non seguitamente, e da una medesima forza, ma interrottamente, e da più forze morte diversissime in quantità, ed in natura. Laonde a liberarsi da così fatte molestie hanno messo in uso un artificio facile, e naturale. Tra le due azioni, cioè quella, che cangia lo stato del corpo, e quella, che il prodotto cangiamento riduce a niente, hanno collocato un termine medio, concependo che il corpo per l' azione, che il suo stato cangia, riceva una determinata quantità di forza eguale all' energia dell' azione, e questa gli venga tolta dalla seconda azione, la quale distrugge la mutazione già fatta, e riconduce il corpo allo stato primiero. Quindi paragonano la prima azione con quella forza, che il corpo riceve, la quale rimanendo permanente, si può agevolmente comparare coll' altra azione, che il corpo nel suo primo stato ritorna.

N. L' artificio mi piace, ma sembrami confuso: perciocchè in infiniti stati può ritrovarsi il corpo, quando si concepisce la prima azione, la quale può esser applicata per guisa, che accresca,

cresca, ovvero diminuisca la velocità del corpo, e lo stesso può far ancor l' altra azione, che allo stato di prima riconduce il corpo. Laonde la medesima azione, se si considera come producente il cangiamento di stato, dovrà concepirsi siccome comunicante al corpo novella forza: se si considera come distruggente il cangiamento da altra azione prodotto, dovrà concepirsi siccome azione, che toglie al corpo la forza comunicatagli.

L. A così fatti incomodi è stata cosa facile il porre rimedio. Conciossiachè il corpo in quiete si concepisce siccome d'ogni forza sprovveduto; quella azione, che dallo stato di quiete il porta allo stato di movimento, o da uno stato di minore ad altro di maggior movimento dicesi, comunicargli, ed accrescergli forza, la quale sarà maggiore, maggior essendo la velocità, benchè per ora prescindo in qual proporzione: quella poi, che dallo stato di movimento maggiore ad altro di minore, o di niun movimento lo trasferisce, si dice diminuirgli, o levargli interamente la forza. Così distribuite le cose cotal forza posta in mezzo tra azione, e azione serve maravigliosamente all' eleganza del metodo. E questa è quella forza, che domandasi forza viva.

C. Usate della naturale vostra pazienza ascoltando in poche parole, se abbia ben penetrato, quanto per voi in moltissime s' è insegnato. Quando una qualunque forza morta viene applicata ad un corpo in quiete, e che si suppone d'ogni forza viva spogliato, si concepisce l' inerzia del corpo reagire, e contrastare coll' azione di quella forza, e di non permetterle di produr in esso alcun cangiamento di stato, se non gli trasfonde una forza eguale alla sua energia, il che ancora accade, quando lo porta ad uno stato di movimento maggiore. Ma se è applicata la forza ad un corpo per iscemarne il movimento, allora l' inerzia non permette, che stato si cangi, se non gli si toglie una forza eguale all' energia della causa. Le quali cose tutte servono ad una più facile, e più spedita maniera di concepire, dipendendo interamente la cosa da quella proprietà, che in ogni corpo risiede di mantenere il suo stato, per cui non è possibile di cangiar lo stato di esso, se non s' esercita una azione proporzionale al cangiamento, che si produce. A cotal cangiamento poi dee esser proporzionale quella forza, che concepiamo aggiungersi al corpo, o diminuirsi, che domandiam forza viva.

N. Così

N. Così fatta dottrina fembra non diftinguere per niun modo la forza viva dalla forza d' inerzia; onde potrebbe a taluno nafcer fofpetto, che inutil foffe d' introdurla ne' corpi; baftando confiderare l' inerzia loro, e le azioni di quelle forze, le quali applicate fono a cangiar lo ftato de' corpi.

L. Voi entrate ne' fentimenti del P. Ruggero Boskovik un de' geometri più profondi, ch' abbia l' Europa, ma da' cui fentimenti in quefta materia l' amor della verità mi sforza d' allontanarmi. Egli avvifando, che tutte le mutazioni di ftato, che intervengono a' corpi, dipendono unicamente dall' inerzia d' effi, e dalle fucceffive azioni della forza morta, francamente afferifce, nulle effer le forze vive, e come affatto fuperflue doverfi rigettare, e non nominare mai più.

C. Ma qui io direi: fe il dottiffimo Padre, formandofi l' idea della forza viva, aveffe concepita, dirò così, un' entità, od un' effer reale, il quale fi veniffe ad appoggiare, ed impadronire del corpo, io m' accorderei con lui a chiamar non folamente a bocca aperta fuperflua cotale forza, ma a ridermi eziandio di chiunque quefto peregrino, e novello metodo di filofofare nella fifica introduceffe. Ma fe altro non fi concepifca per nome di forza viva, ficcome avete fin ora fpiegato, fe non fe la medefima forza d' inerzia accompagnata da certe particolari circoftanze, che non fempre fi voglion confiderare, non fo perchè mai le fi debba muovere guerra, potendo in molte occafioni effer utile alla facilità delle prove.

L. Voglio fervirmi d' un efempio, che fembrami fimiliffimo al cafo noftro. Non avvi geometra, che non riceva volentieri la forza centrifuga, di che è dotato un corpo viaggiante per una curva; e l' acutiffimo P. Boskovik in più d' una delle fue differtazioni ne fa profittevol menzione. Or così difcorro contra di lui. Tutto ciò, che interviene ad un corpo, il qual viaggia per una curva, interamente dipende dalla fua forza d' inerzia, e dalla forza centripeta; perchè intanto quefta è neceffaria, in quanto il corpo, effendo dotato d' inerzia, sforzafi di tener la fua direzione, e di profeguir il fuo viaggio per la tangente; e a ritirarlo dalla tangente, ed a portarlo fopra la curva bafta la forza centripeta: dunque la forza centrifuga è interamente fuperflua, e non dovendofi, fecondo il principio del Newton, fe non fe quelle caufe ricevere, che

vere sono, e sufficienti ad esplicar i fenomeni, saremo costretti alla forza centrifuga dalla fisica dare perpetuo bando. Se io dunque contra de' geometri, anzi di lui medesimo, così disputassi, di qual difesa si servirebbe per sostener la forza centrifuga?

C. Direbbe, che della forza centrifuga un' idea torta, e falsa vi siete formata in mente, concependola siccome interamente distinta dalla forza d' inerzia; ch' essa al fin non è altro, se non la forza d' inerzia messa in quelle particolari circostanze; che mentre si misura la forza centrifuga, altro non si misura alla fine, se non quel, che opera la forza d' inerzia, mentre il corpo vien obbligato a camminar per la curva; il che poi alla fine non vuol dir altro, se non misurar quella forza, ch' è necessaria a ritener il corpo sovra la curva.

L. Sicchè dunque, sebben la forza centrifuga non sia propriamente altra cosa, che l' inerzia del corpo in alcune circostanze considerata, non è inutile l' introdurla ne' raziocinj, ne si dee bandir dalla fisica: anzi sarà profittevole il fissar le sue leggi, e si riconosceranno per veri, e belli i teoremi prodotti intorno a cotal forza dal dotto, e profondo Cristian Ugenio.

Similmente risponderò io intorno alla forza viva. Essa non è per verun modo distinta dalla forza d' inerzia, anzi è la medesima forza d' inerzia da alcune particolari condizioni modificata: contuttociò sarà utile il considerarla con questo nome, e il fissarne le leggi, che in molte quistioni, e ricerche potranno essere di non picciolo giovamento.

N. Quali sono quelle circostanze, e condizioni, che vogliono accompagnar la forza d' inerzia, perchè meriti d' esser chiamata col nome di forza viva?

L. Giacchè le avea a lungo spiegate innanzi, non giudicava di doverle presentemente ripetere. Ma poichè me le domandate, tornerò a dirle in poche parole. Quando si nomina forza viva, non s' intende semplicemente la forza d' inerzia, ma quella facoltà, di che è dotata la forza d' inerzia, di esercitare una continua, e successiva azione, o piuttosto reazione contro all' azione di qualsivoglia forza morta impiegata a cangiar lo stato del corpo, finchè questo allo stato di quiete venga condotto; e la misura di così fatta forza quando ricercasi, non

altro,

altro, per quel che si è detto, ricercasi, se non la misura dell' azion della forza morta, per cui nello stato del corpo così fatta mutazione si compie.

N. Ma non sempre da uno stato di determinata velocità allo stato di quiete il corpo ritorna, fermandosi non di rado in uno stato di minore velocità.

L. In questo caso non si farà consumata tutta la forza viva, cioè tutta la facoltà d'esercitar la reazione, rimanendo intera l'altra parte nel corpo.

C. Così è; e se il corpo da uno stato di minore ad uno stato di maggiore velocità per l'azione della forza morta conducasi, si accrescerà nel mobile la forza viva, o sia la facoltà di esercitare l'azione già dichiarata.

N. Formata in cotal guisa l'idea della forza viva, sarà una cognizion molto utile il sapere, per qual modo voglia essere misurata: e se le tenebre, ove è involta la cosa, fossero dense così, che non potesse la ragion diradarle, non dovrebbe ella esser insensibile all'ignoranza d'una importantissima verità.

L. Che se anche dopo ciò lo stimatissimo Padre si rimanesse fermo di non voler ricever ne pur la parola di forze vive, si pensarebbe egli d'aver troncata ogni contesa, e d'aver messa pace tra i matematici? Quella quistione, che prima si facea delle forze vive, si rivolgerà tutta intorno all'azioni delle forze morte, e si cercherà, in qual guisa queste si vogliano misurare: perchè in fine chi misura le forze vive, non altro misura, che queste azioni. Per la qual cosa, mutate le voci, la quistione, e la contesa resterà viva, e accesa siccome prima.

N. Ma di cotali azioni delle forze morte come pensa il Padre Boskovik, e come scrive?

L. Egli a dir vero le misura secondo l'opinion volgare de' Cartesiani, ma senza recarne prova soda, e convincente, anzi ciò supponendo come una verità inconcussa, e da ammettersi senza opposizione da chi che sia. E quando verrà il tempo opportuno, ve lo farò toccare con mano. Per altro voi vedete quel, che si debba rispondere all'ultima conclusione del P. Boskovik, che se non ostante l'inutilità delle forze vive se ne voglia ritenere il nome, si potrà misurarle e secondo il parere de' Leibniziani, e secondo il parere de' Cartesiani, diffinendole or in una guisa, ed or in un'altra. Se per forza viva intendasi quella

disposizione, che ha il corpo di passar un certo spazio in un dato tempo con moto equabile, la verità stara per li Cartesiani. Se poi intendasi quella disposizione, che ha il corpo di scavar fosse nella materia cedente, e di chiuder elastri, i Leibniziani avranno ragione: e così dando diverse diffinizioni alla parola, sforzasi di ridur la controversia a contesa di voce. Rispondo, che sebben le parole son segni ad arbitrio, pure per non ridur la quistione, che è stata sempre di cosa, a diversa intelligenza di voci, mi dichiaro, che per nome di forza viva non intendo nulla di tutto ciò: ma intendo quella forza, che si concepisce nel corpo in movimento siccome transfusa dall' azion della forza morta, la quale alla medesima azion della forza morta è proporzionale. Si dovrà poi esaminare, quale degli intelletti datigli dal P. Boskovik s'accordi con questo, e qual no.

N. Gli Autori, che hanno di tal materia trattato, convengono con voi nel dar una idea sì chiara della forza viva?

L. A confessarvi ingenuamente, leggendo gli Autori dell' una, e dell' altra parte, troverete molta varietà, ed inviluppo. Chi diffinisce la forza viva per quella facoltà, che hanno i corpi di serrar elastri, chi l'ha detta una forza congiunta col moto, chi proveniente dal moto. In somma hanno veduto al barlume il nodo della quistione, ma non l'hanno chiaramente distinto. E per questa ragione, lasciata l'autorità da una parte, ho preso risoluzione di pensarvi col mio proprio intelletto: ho svolte, e messe in chiaro le idee confuse; ho pesato quali sieno gli argomenti sin or portati, e riducendo in tutto chiaramente al punto importante la controversia, ho studiato per me medesimo di stabilire la verità con novelle ragioni, non sembrandomi la più parte delle sapute molto convenienti E nel bel principio voi vedete, che ho premessa una idea sì chiara della forza viva, che non vi può esser ambiguità.

N. Mi reca gran maraviglia, siccome la misura della forza viva sia cotanto all' oscuro, dopo essere scorso più d'un secolo, da che questo genere di forze s'è cominciato a considerare: giacchè veggiamo, che intorno ad essa sotto il nome di forza della percossa ha alcuna cosa pensata anche il dottissimo Galileo. Egli è ben vero però, che nè il Galileo, nè il Torricelli, nè il Borelli, due degnissimi suoi discepoli, non hanno

per

per altro fine feriamente meditato, fe non per fiſſare qual proporzione aveſſe colla forza morta, come colla gravità: e tutti e tre dopo matura difamina hanno faggiamente divifato non poter avere la forza viva, o fia della percoſſa alla morta minor ragione di quella, che abbia l' infinito al finito. Sebbene a parlare più propriamente, ficcome difcende dall' idea, che ne avete data, e ficcome è ftato prima dal dottiſſimo Signor Ermanno avvertito, vuolfi dire, che queſte due forze fono quantità eterogenee, e di comparazione incapaci, come la fuperficie, e la linea.

C. Di grazia non lafciamo di riflettere ad alcuni fenomeni, che hanno dato occafione di fpeculare a' nominati geometri. Confiderava il Sig. Galileo un palo confitto in terra, fopra di cui lafciava cader un pefo di dieci libbre dall' altezza di quattro braccia, e per eſſo venia il palo profondato due dita: indi rimeſſo il palo alla pofizione di prima, ricercava quanto pefo foſſe neceſſario a profondarlo fimilmente due dita, e ritrovava a cagion d' efempio eſſere neceſſario il pefo di cento libbre: dal che pare, che debba inferirfi, che la forza viva d' un corpo di dieci libbre cadente da quattro braccia foſſe eguale alla gravità d' un pefo di libbre cento.

N. Ci vedo in così fatto difcorfo del paralogifmo, ma avrei bifogno di tempo ad ifvolger bene le idee.

C. Ma ditemi: è ella la forza morta di gravità, ovvero la fola preſſione, che nella terra ficca il palo per le due dita?

N. No certamente, perchè il faſſo di cento libbre deve muoverfi per lo fpazio delle due dita: onde la gravità efercita neceſſariamente un' azione, che nello ftato del corpo mutazione produce.

C. Queſto l' ha veduto il Borelli, ed è però arrivato alla vera rifpoſta. Ma profeguiamo: di qual genere farà il movimento del noſtro faſſo di cento libbre, equabile, o accelerato?

N Accelerato, perchè la gravità fempre opera.

L La rifpoſta è troppo follecita: penfateci un poco.

N. Equabile certamente non può eſſere; perchè la velocità in prima era nulla, e deve per virtù della gravità accelerarfi. Ma ne pure fempre accelerato; perchè paſſate le due dita non potrebbe eſſer eftinto. Avete ragione. Dico, che in prima farà accelerato, indi ritardato. Anzi oſſervate, fe di cotal

tal moto spiego bene l' economia. Posto il peso sopra del palo, la sua gravità dee esser maggiore della resistenza del terreno, altrimente non seguirebbe mai moto: e se la resistenza del terreno si mantenesse sempre la stessa, il palo con moto accelerato si muoverebbe in perpetuo animato da una forza costante eguale alla differenza della gravità di cento libbre, e della resistenza del terreno: ma perchè questa va crescendo sempre, ed aumentandosi, però la differenza tra essa, e la gravità si va sempre diminuendo, finchè verrà ad esser nulla, e fin a questo punto il moto sarà accelerato. Ma dopo essendo la gravità superata dalla resistenza, e sempre più quanto più il palo s' abbassa, il moto sarà ritardato, finchè del tutto s' estinguerà ogni velocità.

C. Ora chiudete il discorso, e ditemi quanta forza siasi impiegata nel profondar il palo due dita.

N. Dico, che un' azion tanto grande della gravità di cento libbre, quanta se n' è esercitata nel movimento di due dita, per le quali il palo s' è profondato. Ma nell' altro caso, in cui segue lo stesso effetto per mezzo della forza di dieci libbre cadenti sopra del palo, tanta se n' è impiegata, quanta se n' è raccolta per l' azione di dieci libbre esercitata in tutto il movimento per quattro braccia, omettendo le due dita, che non mi sembran molto considerabili; nella quale spiegazione non v' ha cosa, che non s' intenda.

C. Vedete dunque, che forza viva, o azione di forza morta, eguaglia forza viva, e che non v' ha altro divario se non, che in un caso niuna azione erasi esercitata, quando comincia l' abbassarsi del palo, ma si esercita, mentre s' abbassa: nell' altro la forza viva erasi raccolta per l' azion della gravità prima, che la berta toccasse il palo. Quindi intenderete il perchè rialzata alla stessa altezza la berta, e lasciatala cadere, il palo discende, ma alquanto meno: ma rimessogli sopra il sasso di cento libbre non più s' abbassa.

N. Rialzata la berta profondasi il palo, perchè abbiam colla caduta tanto di forza acquistato, che eguaglia l' azione della resistenza del terreno fino ad una determinata profondità, la quale deve esser minore della passata, perchè la resistenza è maggiore. Ma le cento libbre di peso non superano la resistenza del terreno, onde non può per lo peso rimesso movimento

mento

mento alcuno feguire. Ma farebbe di meftieri ad aver moto adoprare un pefo, che la predetta refiftenza vinceffe; e ad ottener un effetto eguale richiederebbefi un pefo tale, la cui azione efercitata per quello fpazio, percui nell'altro cafo il corpo è difcefo, eguagliaffe l' azione della refiftenza di quel terreno.

C. Avete fu due piedi ritrovato quello fteffo fiftema, che con lunghe meditazioni erami privatamente formato, e per crederlo libero da paralogifmo non amerei altro, che l' approvazione del Sig. Lelio.

L. L' evidenza dee convincervi, non la mia autorità, che è nulla, fe non fia dal dimoftrativo difcorfo avvalorata. Per altro fembrami, quanto avete penfato, evidentiffimo. E da ciò nafce chiaramente la foluzione d' un aperto paralogifmo: perchè mai fofterrò colla mano fenza offefa una picciola palla di piombo, che cade dall' altezza d' un braccio, o poco più, e non fofterrò una maffa di piombo grande quanto quefta ftanza fenza frattura d' offa, benchè la gravità di quefta fia infinitefima, e incomparabile per rapporto alla forza di quella?

C. La fpiegazione nafce dalle cofe già dette; perocchè la palla, che cade, va perdendo a poco a poco la fua forza, mentre produce nella palma della mia mano una fpecie di contufione, la quale non è però sì grande, cadendo la palla da picciola altezza, che altro danno in me poffa produrre, fe non un picciol dolore. Ma la vaftiffima mole di piombo, che vi fiete immaginata, vincendo colla molta fua gravità la refiftenza de' mufculi, e delle offa, dee neceffariamente produr moto, e comunque la refiftenza vada crefcendo, pure reftando fempre al di fotto del pefo del piombo, è neceffario, che fegua la frattura dell' offa.

Un altro fenomeno di più difficile fcioglimento, che a prima vifta fembra diftrugger le cofe fin ora dette, amerei di fentire da voi fpiegato: Non mi vergogno di confeffare d' avervi alcuna volta fenza frutto penfato. Egli è il feguente. Se fopra la verga d' acqua, che afcende in una fontana, io metto una palla, egli addiviene, che quefta vien dalla forza dell' acqua portata in fu, indi in un determinato luogo fi ferma, e fa come equilibrio: ma fe la pongo ancora più alto, ella non feconda la velocità dell' acqua, ma contro al movimento della medefima viaggia, e s' abbaffa.

L. E

L. E qual è in così fatto fenomeno il nodo di difficile fcioglimento?

C. La forza dell'acqua, che afcende, è pur forza viva; la gravità della palla è pur forza morta. Nondimeno la palla meffa tra cotai forze fovente fta in equilibrio, fovente cede alla gravità, e vince la forza oppofta dell'acqua. Non è dunque vero, che la forza viva fia della morta infinitamente maggiore, mentre altre volte l'eguaglia, ed altre le cede.

L. A fviluppare quella foluzione, che già fapete, fpogliate per un momento la palla della fua gravità, e ditemi quel, che vi fembra dover accadere in sì fatta ipotefi.

C. La palla deve afcendere in qualunque luogo fi ponga: non ve n'ha dubbio.

L. Beniffimo: ma io vorrei, che mi divifafte minutamente l'economia di tal movimento. La palla, finchè è fermata tra le mie dita, è in quiete totale; abbandonata, acquifta una determinata celerità. L'acquifta tutta ad un tratto?

C. Secondo la legge della continuità poco innanzi ftabilita, dee paffare per tutti li gradi, che fono tra la quiete, e la velocità terminale.

L. E quanto tempo s'impiega in quefto paffaggio?

C. La mifura precifa farà difficile ad affegnarla; ma credo vi farà di meftieri un tempo finito.

L. Dividete ora quefto tempo finito in infinitefime particelle, e ditemi, nel primo elemento di tempo qual parte di velocità abbia la palla ricevuta dall'acqua.

C. Se l'acqua ha meftieri di tempo finito per comunicargliela tutta, forza è a dire, che in un tempo infinitefimo gliene comunichi una infinitefima parte.

L. Stabilito quefto principio, riveftite ora la palla della ua gravità, e mi dite, qual velocità riceverebbe la palla in pari elemento di tempo dalla gravità, quando non foffe impedita dalla reazione dell'acqua?

C. Un grado infinitefimo.

L. Dunque raccogliamo omai la conclufione, che è giunto il tempo.

C. Dunque fe pofta la palla fovra lo zampillo dell'acqua, la velocità, che riceve in quell'elemento di tempo dalla forza dell'acqua, fupera quella, che è prodotta dalla gravità, la

la palla anderà in alto, se eguale, si fermerà in equilibrio, se minore, calerà abbasso. Sono appagato; la spiegazione cammina con quattro piedi.

L. Il paralogismo in questo, ed in altri somiglianti esempj consiste in ciò, che tacitamente supponesi, che ad un tratto si riceva dalla palla tutta la forza, la quale successivamente trasfondesi: onde si paragona la forza viva, e la morta. La comparazione dee farsi tra le due infinitesime azioni, che dalle due forze opposite nel medesimo tempo sarebbero esercitate: e se queste, le quali si suppongono contrarie, si trovano eguali, non potrà seguire movimento di sorte alcuna; se ineguali, là si dirigerà il movimento, dove l'azion maggiore comanda.

C. Comunque le conclusioni dedotte sien chiare, e legittime; pure vi prego a liberarmi da un dubbio, che mi s'aggira ancor per la mente. Allorchè la palla è posta in quel punto, in cui per l'equilibrio non può ne discendere, ne in alto poggiare, l'acqua zampillante non esercita contra d'essa se non se una pressione, la quale fa equilibrio, ed eguaglia squisitamente la forza morta di gravità. E come mai può accadere, che un corpo urtato con violenza da un altro posto in movimento non sia costretto a cangiare stato soffrendo alterazione nella velocità, o almeno nella figura, e non sostenga fuorchè una pura pressione, con cui la sua gravità faccia un equilibrio perfetto.

L. Il dubbio è grave così, che meritarebbe una diligente, e lunghissima discussione. Ma poichè e questo ci trarrebbe troppo lontani dal principale suggetto, ne io fin ora ho avuto l'agio di ponderar la cosa a mio senno, e di soddisfarmi: io mi restringerò ad ispiegare generalmente la maniera, onde l'acqua nell'ipotesi fatta esercita unicamente pressione contro alla palla, ne entrerò in misure, ed in calcoli, i quali però instituiti apparirebbero forse fecondi di pesatissime conseguenze. Allorchè lo zampillo d'acqua, che in alto poggia, incontra l'impedimento della palla solida, non potendo continuare il suo viaggio in linea retta, obbligate sono le parti dell'acqua, che lo compongono, a deviar dalla lor direzione, ed a formare, descrivendo ciascuna la sua curva, un conoide inverso, nel mezzo del quale stassi la palla. Quindi nasce nelle parti-

celle del fluido la forza centrifuga, dalla quale intorno intorno vien premuta, e follecitata la palla. Adunque qualor a cotali forze centrifughe, ed alla gravità non manchino quelle condizioni, che fono dall'equilibrio richiefte, dovra la palla fenza moto, e fenza cangiamento di ftato ftare fofpefa, ne fofterrà fe non la preffione della forza centrifuga, che da ogni lato la circonda, e la ftringe. Ma noi fiamo tanto deviati fuori di ftrada, che non ritrovo più la traccia per ritornarvi.

N. Avete dichiarato a lungo, che cofa fia forza viva, e avete detto effere quella forza, la qual' intendefi trasfufa nel corpo per l'azione della forza morta, a cui però deve riufcire proporzionale; e ammeffa tal diffinizione, avete contra del P. Boskovik ftabilito, che la forza viva non è fuperflua, e che la controverfia, di che abbiamo a trattare, non è una frivola quiftione di voce.

L. Così fatte cofe fuppofte, conviene ftabilire un punto, fovra di cui non v'ha contefa di forte alcuna, e quefto fi è, che le forze vive de' corpi dotati della fteffa velocità fono in ragion delle maffe. La ragione è chiara; perchè prendete due corpi eguali, ciafcuno avrà per efempio un grado di forza; dunque tutti e due infieme ne avran due, fe aggiungiamo il terzo, ne otterremo trè, e così di mano in mano. Il qual progreffo a voi, che fiete geometri, bafta accennarlo, perchè veggiate chiaramente dimoftrato, effere le forze vive de' corpi dotati di eguale celerità in ragion delle maffe.

Il punto della quiftione fi è, qual fia la proporzion tra le forze vive de' corpi eguali di maffa, ma di celerità difuguali. Una parte de' filofofi vuole, che fieno in ragione delle femplici celerità; altri vogliono, che fieno in ragione de' quadrati delle celerità: ovvero, mettendo in conto l'altro elemento della maffa, di cui non forfe mai controverfia; altri penfano le forze vive effere in ragion compofita delle maffe, e delle velocità, altri in ragion compofita femplice delle maffe, e duplicata delle velocità. E quefto fi è il punto da difcuterfi, e forfe da metterfi in difputa tra me, e il Signor Cefare.

C. Se all'autorità cedere fi doveffe, certamente la prima fentenza avrebbe la preminenza, effendo foftenuta, e difefa dal gran Cartefio, che a vero dire il mondo ha illuminato, ed ha infegnato il vero metodo di filofofare.

L. Non

L. Non il Cartesio solamente, ma il Galileo ancora, quell' uomo sommo, che nel filosofare dal vero metodo non si è allontanato giammai, ha la medesima sentenza abbracciata; comechè ne l'uno, ne l'altro l'abbia mai esaminata profondamente. Leggete quì ciò, che nel principio della terza giornata propone il Sagredo. *Non mi par, che sia da dubitare, che quel grave, che viene dall' altezza di sei braccia, non abbia, e percuota con impeto doppio di quello, che ebbe, sceso che fu tre braccia, e triplo di quello, che ebbe alle due, e sescuplo dell' avuto nello spazio di uno.* Alla qual proposta risponde poco dopo il Salviati. *L' altra proposizione si dimostra falsa colla medesima chiarezza. Imperocchè essendo quello, che percuote, il medesimo, non può determinarsi la differenza, e il momento delle percosse, se non dalla differenza delle velocità. Quando dunque il percuziente venendo da doppia altezza facesse percossa di doppio momento, bisognerebbe, che percuotesse con doppia velocità: ma la doppia velocità passa il doppio spazio nell' istesso tempo, e noi vediamo il tempo della scesa dalla maggior altezza esser più lungo.* Nella qual risposta supponesi, che la forza della percossa, ovver la forza viva sia proporzionale alla velocità. Similmente l' afferma il Borelli alla prop. 13 della forza della percossa. Similmente il Sig. Newton, e generalmente tutti coloro, che hanno filosofato prima del Leibnizio. Ma, a dirvi con ischietezza, l' autorità di costoro non è appresso di me di gran peso; perocchè avendo scritto prima del Leibnizio, sono andati seguendo una certa prima apparenza, e non hanno disaminato profondamente i momenti ne dell' una, ne dell' altra sentenza.

C. Non so, se sia convenevole alla riputazione di tanti sublimi ingegni il pensare, che siensi lasciati ingannare da una prima fallace apparenza di verità. Ma comunque siasi, voi parlate, come se al Leibnizio, tosto che ha messa al pubblico la nuova sentenza, sia andata frettolosamente dietro tutta la schiera de' Matematici.

L. No Signore. Io so benissimo, che per buona pezza il Leibnizio non ebbe altro, che contraddittori: benchè in mezzo a furiose tempeste egli persistesse immobile al par d' uno scoglio. Ma poichè il Sig. Giovanni Bernoulli, uomo di molto ingegno, e dottrina, siccome è noto, in quella disertazione

 bel-

bellissima, che meritò gli elogj dell' Accademia regia di Parigi, alzò lo stendardo in favore della forza viva del Leibnizio, condusse alla sua fazione molti filosofi de' più celebri, benchè ad altri di gran nome seguitasse a piacer la vecchia opinione: tanto che, se coll' autorità decidere si dovesse, la lite rimarrebbe sicuramente indecisa.

N. Amerei, che per ora mi nominaste i più celebri dall' una parte, e dall' altra; acciocchè leggendone alcuno prima de' nostri congressi, possa ad essi intervenire con qualche provvedimento di cognizione.

L. Vi nominerò per ora quelli, che mi presenterà la memoria. Per la sentenza del Cartesio sonosi dichiarati oltre l' Ab. Catalano, e M. Papin, che pugnarono contra del Leibnizio, il Cav. de Louville, M. Mairan nelle Mem. dell'Acc. di Parigi, il Mac-Laurin in una delle disertazioni, che hanno riportato il premio: di più i dottissimi Inglesi Desagulieres, Pemberton, Jurin, e Stirling. Aggiungansi il Croutatz, il P. Crivelli, il P. Baldini, due personaggi della Congregazione Somasca, il Clerke, ed il Martini, che ha stampato un libretto in questa materia. Tra questi siami permesso di dar luogo ancora al dottissimo P. Boskovik, il quale, sebbene in apparenza rigetta le forze vive, pure in verità combatte per la parte de' Cartesiani.

Seguono il Leibnizio, Giovanni Bernoulli nel luogo citato, e negli atti di Lipsia, l' Ermanno nella Forononiia, e ne' Comment. dell'Ac. di Pietroburgo, ed in questi il Bulfingero, Daniel Bernoulli, ed il Wolfio, il Rictero negli atti di Lipsia, il March. Poleni nel libro de Caf., e nelle pistole, lo s' Gravesande, ed il Muskembroek nelle opere loro, il Co: Riccati ne' Comm dell' Ac. di Bologna, ed ultimamente Mad. de Chastelet nelle fisiche instituzioni. Ve ne avrà degli altri e per l' una parte, e per l' altra, che ora non ho presenti: ma ne' seguenti congressi caderà probabilmente in acconcio di nominarli.

C. Confesso, che siccome la maggior parte avea letta di quelli, che avete nominati per parte del Cartesio: così molti tra i fautori del Leibnizio mi riescon nuovi, ne credeva il numero loro sì grande.

L. Ma alla fine cotal registro è buono per la storia letteraria, non per la decision della lite. Io soglio solo ascoltar la

ragio-

ragione, e poco l'autorità; alla quale uso soltanto questo rispetto di esaminar più profondamente le sentenze abbracciate da uomini grandi. Quindi, lasciando questa da parte, entriamo a stabilire l'ordine de' nostri congressi. Per misurare la forza viva residente in un corpo due sole maniere io ritrovo, cioè o di considerarla siccome effetto, e di misurar la causa, che la produce, e perciò sarebbe di mestieri di ritrovar la misura dell'azione della forza morta secondo le cose dette; o di considerarla siccome cagione, e perciò sarebbe di mestieri misurar l'effetto, ch'ella produce, cioè l'azione della resistenza. Amendue questi metodi sono fondati sopra il principio incontrastabile, ed ammesso dalle due parti concordemente, che tra la cagione piena, ed intera, e l'effetto pieno, ed intero dee passare una eguaglianza strettissima.

Amendue questi metodi sono stati da' filosofi messi in uso: ma io veggio, che da questa divisione sarà bene di allontanarci; perchè troppo è facile, che l'uno di questi metodi ajuti l'altro quasi nel medesimo raziocinio. Però penso essere molto opportuno il seguir l'ordine delle cose. Se vi piace, dividerò in due parti tutta la materia, di che abbiamo a trattare. Nella prima parte consideraremo la forza viva, la qual si genera, o pur s'estingue per l'azion delle forze morte; nella seconda tratteremo della forza viva, che passa da un corpo ad un altro: e nell'una, e nell'altra parte esaminaremo, qual peso abbiano gli argomenti dagli scrittori prodotti. Nella prima parte parleremo prima delle sperienze fatte per decidere la quistione; poi di ciò, che il gran Bernoulli ha dedotto dalla teoria comparata degli elastri; esamineremo indi, se sussistenti sieno, o no le risposte date a così fatti argomenti; dopo ciò interporrò la mia opinione intorno alle ragioni allegate; parlerò della gravità, e dopo aver condotta la quistione al punto preciso mi porterò a ragionare delle forze composite, e de' movimenti, la cui direzione non segue la direzion delle forze. Nella seconda parte esamineremo quegli argomenti, che sonosi dedotti dalla comunicazione del movimento tanto ne' corpi molli, quanto negli elastici, prima negli urti diretti, indi negli indiretti, ed obbliqui. Ho fatto in brieve un abbozzo delle cose da trattarsi, e dell'ordine: per altro non avendo noi scarsezza di tempo, e nostro unico fine essendo di trattenerci in ragio-

ragionamenti utili, e dilettevoli, faremo quella divisione, che ci riuscirà più comoda, e profittevole.

C. Tutto va bene: ma per voi sonosi omessi due fonti, che per li Cartesiani sono abbondantissimi d'argomenti: e questi sono la teoria del moto equabile, ed uniforme, e la comunicazione di movimento tra i corpi perfettamente duri.

L. Di questo secondo vi prometto di favellarne in quella giornata, ove de' corpi molli terremo discorso: dell'altro gli argomenti a mio parere son così debili, che mi dispenserei volentieri dal ragionarne. Benchè se al presente volete metterli in campo, mi studierò di darvi soddisfazione. Ma voi vi lamentate, che vi trattengo più del dovere, ne vi lascio andar a casa per tempo.

N. No Signore: l'ora non è così tarda, e so, che anche il Sig. Cesare avrà piacere d'udire la discussione di questo punto, quando a voi, che stanco siete dal viaggio, ciò non rincresca.

L. Il fervor del discorso, e l'utilità delle cose m'ha fatto dimenticare della stanchezza. Recate però in mezzo il vostro argomento tratto dal moto equabile, che vi sembra così robusto.

C. Io mi metto sotto degli occhi due corpi muoventisi con celerità equabili, e però dotati di forze vive. Io vi domando, quali in questo genere di movimenti sono gli effetti delle medesime forze? certamente gli spazj in eguali tempi passati, i quali spazj, accresciuta la velocità, s'accrescono, diminuita, si fanno minori: purchè i corpi sieno eguali; e quando eguali non fossero, converrebbe per aver l'effetto moltiplicar lo spazio per la massa. Seguitiam però per amor di facilità l'ipotesi de' corpi eguali: ma gli spazj sono, come le velocità: dunque, se conservar si voglia la corrispondenza tra la cagione, e l'effetto, dovranno esser le forze vive, come le velocità. Senza fallo questo argomento semplicissimo decide la contesa a favore de' Cartesiani, o almen dimostra, che le forze vive nel moto uniforme, le quali dal Leibnizio, e da altri suoi seguaci si chiamano forze pure, sono in ragion delle masse, e delle velocità.

L. Prima d'entrar nella disamina dell'addotto argomento, lasciate, ch'io dica alcune cose sull'ultime parole da voi pronun-

nunciate. Comunque io ſappia, non eſſervi autore, che abbia miſurate diverſamente le forze pure, e le forze de' corpi, le cui velocità ſi accreſcono, o diminuiſcono, che chiamano miſte: pure queſta diſtinzione di forze vive in pure, e in miſte potrebbe indurre a credere eſſervene di due generi. Ma ſiccome riflette il Bulfingero ottimamente, ella è una ſteſſa ſteſſiſſima forza quella, che il mobile ha acquiſtata cadendo dall'altezza di quattro braccia, o il moto indi ſi mantenga uniforme nel vacuo, o ſi diminuiſca a cagion delle reſiſtenze, che incontra: la qual coſa ancora evidentemente deriva dall' idea chiariſſima, che ne abbiam data. Però ſe l' eſpoſta ragione è valida, prova, che tutte le forze vive, o pure, o miſte ſono in ragion delle maſſe, e delle velocità; e ſenza paura di paralogiſmo ſi potrà paſſare dal moto equabile all' accelerato, ed al ritardato, traſportando all' altro la miſura delle forze vive, che avremo ritrovata nel primo.

Ma queſto meſſo da parte io voglio, che aſcoltiate il Leibnizio, il quale dalle ſteſſe leggi del moto equabile argomenta in favore di ſua ſentenza. Eccovi il ſuo argomento tal qual ſi legge nell' epiſtola vigeſima ſeconda del comercio epiſtolico tra lui, e Giovanni Bernoulli, omeſſe le ſole parole formalmente, e virtualmente, le quali egli ſteſſo giudica nelle ſeguenti lettere, che ſia bene omettere.

Un' azione, che fa il doppio nel tempo ſimplo, è doppia d' un' azione, che fa lo ſteſſo doppio nel tempo doppio: come il viaggio di due miglia in un' ora è doppio del viaggio di due miglia in due ore:

Un' azione, che fa il doppio nel tempo doppio, è doppia d' un azione, che fa il ſimplo nel templo ſimplo: come il viaggio di due miglia in due ore è doppio del viaggio d' un miglio in un' ora.

Dunque un' azione, che fa il doppio nel tempo ſimplo, è quadrupla d' un azione, che fa il ſimplo nel tempo ſimplo: ovvero il viaggio di due miglia in un' ora è quadruplo del viaggio d' un miglio in un' ora.

Se in luogo del doppio ſoſtituito ſi foſſe il triplo, il quadruplo, il quintuplo, ſi ſarebbe ottenuta un' azione nove, ſedici, venticinque volte maggiore: e generalmente è chiariſſimo, che le azioni motrici equabili, e fatte nello ſteſſo tempo ſono in ragion

gion de' quadrati delle velocità; ovvero mutata frase, che in uno stesso, o in eguali corpi le forze sono in ragion duplicata delle velocità.

Ecco l' argomento leibniziano, il quale avrò piacere d'udire, quale impressione faccia nelle vostre menti.

N. Bisogna disaminare amendue gli argomenti, e paragonarli insieme. Amendue si accordano in questo principio, che le forze vive sono, come le azioni loro esercitate in tempi eguali; il qual principio sembra molto ragionevole, ne ad esso trovo, che opporre. Anzi ammetterò universalmente, che le forze vive sono in ragion diretta dell'azioni, e reciproca de' tempi. Discordano in questo, che l' uno assume per effetto pieno, ed intero dell'azioni de' corpi eguali gli spazj scorsi, ovvero, se i corpi fossero disuguali, le masse per gli spazj multiplicate. Ma il Leibnizio volendo, che l'azione, la quale fa doppio spazio in tempo uno, sia doppia di quella, che fa lo stesso spazio nel tempo due, aggiunge a' predetti elementi l' elemento della velocità; onde l' effetto dell' azioni sarà in ragion composita degli spazj, e delle velocità, se i corpi sono eguali; e se sono ineguali, delle masse, degli spazj, e delle velocità. Non so, se abbia ben penetrata la mente di questo insigne filosofo.

L. Ottimamente; giacchè da un secondo argomento portato da lui nella lettera ventesima quarta, che nel fondo confessa essere lo stesso, che l' antecedente, apparisce, ch' egli nell' effetto pieno, ed intero vi computa la velocità. Dice dunque così. *Le azioni motrici, parlo dell' equabili, dello stesso mobile sono in ragion composita degli effetti immediati, cioè degli spazj scorsi, e delle velocità: ma gli spazj scorsi equabilmente sono in ragion composita de' tempi, e delle velocità: dunque l' azioni equabili sono in ragion composita della semplice de' tempi, e della duplicata delle velocità. E perciò negli stessi tempi, ovver negli stessi elementi di tempo le azioni motrici dello stesso mobile sono in ragion duplicata delle velocità; ovvero se i mobili sieno diversi in ragion composita della semplice delle masse, e duplicata delle velocità*. Ed a questo scopo è drizzata la disertazione, che sta registrata nel primo tomo de i Comm. dell' Accad. di Pietroburgo, ed è opera del dottissimo Signor Wolfio.

C. Mi

C. Mi pare ſtrana aſſai così fatta opinione. In virtù dell' azioni motrici i due mobili ſcorrono due ſpazj determinati, i quali ſono i veriſſimi effetti di quelle azioni: queſto o ſi faccia in più breve, o in più lungo tempo, o con maggiore, o con minore velocità, gli effetti ſono i medeſimi: e ciò par, che riconoſca lo ſteſſo Leibnizio, mentre chiama gli ſpazj effetti immediati.

L. Ma voi, Signor Neſtore, che giudicate di così fatti argomenti? convien dire, che abbiate l' animo ſoſpeſo tra due, perchè vi veggio molto penſoſo.

N. Era applicato meco medeſimo a rinvenire un metodo per iſciogliere un problema venutomi nella mente. Io in più anni ho meſſa inſieme una quantità di danaro, ſulla quale affidato, mi ſono meſſo in cammino, ed ho fatte più miglia in un dato tempo ſenza incomodar mai la borſa: mi ſapreſte voi con queſti dati indovinare il numero de' danari, ch' ella rinchiude?

C. L' ora è tarda, non ci perdiamo in facezie.

N. No Signore. Riſpondetemi con pazienza; che il problema propoſto ha a far più col ſoggetto, che non penſate.

C. Numerateli ſe volete, ch' io ve li dica; perchè i dati non ſon baſtanti a ſciogliere il problema.

N. Così penſo ſicuramente che ſia. Ma ſe per la ſtrada incontrerò delle reſiſtenze, per cui vincere ſia di meſtieri alleggerire la borſa, come della fame, e della ſtanchezza, onde biſogni laſciar de' danari agli alberghi; de' fiumi, onde ſia d' uopo pagare il barcaiuolo, e così di mano in mano, finchè la borſa interamente ſi vuoti: mi ſapreſte voi aſſegnare il danaro, che aveva prima di cominciare il viaggio, e d' aver incontrata reſiſtenza?

C. Baſta, ch' io poſſa raccoglier la ſomma de' danari, che avete ſpeſi nel vincere le voſtre reſiſtenze; e quella deſſa ſarà la quantità del danaro, con che partiſte.

N. Guardate la ſomiglianza, che paſſa. Il mobile ſpinto dalla gravità, o da altra forza morta ha raccolta una quantità determinata di forza viva, in virtù della quale ſi mette in un moto equabile, e paſſa in un dato tempo due, o tre braccia; ma in queſto paſſaggio non ne ſpende ne pur una parte infiniteſima: ſiccome io faccio più miglia ſenza ſpendere un dana-

F ro.

ro. Or ficcome non è possibile con tai dati assegnare il danaro, che ho; così non è possibile, che determiniate la forza del corpo. Ma se il mobile la consumerà, vincendo degli ostacoli, allora raccogliendo tutta la somma della forza spesa negli ostacoli vinti, potrete ritrovar la forza viva, di che era dotato; ficcome facendo una somigliante operazione la somma avete ritrovata del mio danaro.

C. Questo è il modo di sottrarsi dalla forza degli argomenti burlando, non rispondendo. Lo spazio scorso dal mobile in dato tempo è effetto della forza viva; là dove il vostro viaggio non è effetto del vostro danaro.

N. Io non vi negherò, che più stretta corrispondenza non passi tra la forza viva, e lo spazio scorso in dato tempo, che tra il mio danaro, e il mio viaggio. Imperocchè crescendo la forza viva dee crescere lo spazio in dato tempo passato; ma crescendo il mio danaro non dee di necessità aumentarsi il mio viaggio. Nondimeno se non lo dimostrate, non vi concederò, che egli sia effetto della forza viva; ficcome il mio viaggio non è effetto del mio danaro. E la ragione si è, perchè sebbene senza forza viva non si scorrerebbe quello spazio; ne senza danaro io viaggerei; pure nel passar quello spazio, e nel far quel viaggio non si spende ne forza viva, ne danaro.

L. Il Signor Dionisio Papin, che per altro è Cartesiano, e scrive contra del Leibnizio, è di questo medesimo sentimento. Prendete gli atti di Lipsia del 91, e leggete ciò, che egli scrive. *Di due corpi*, dice egli, *posti in movimento quello ha più di potenza, che più d'effetto è valevole di produrre: che se ne l'uno, ne l'altro è tale, amendue saranno provveduti di forze eguali. Riflettasi poi, che la legittima misura della quantità dell'effetto non è ne la quantità dello spazio passato dal mobile, ne la quantità del tempo, per cui il movimento continuasi, ma la resistenza, che vincesi. Ciò è manifesto, perchè nella meccanica è già stabilito, che orizzontalmente si scorrono spazj grandissimi quanto si voglia, ed il moto orizzontale può continuar in eterno senza diminuzione della potenza: perciocchè a continuare il movimento orizzontale supponghiamo, che nulla agire si debba, cioè che nulla resistenza debbasi superare*. Vi ho letto questo passo, acciocchè veggiate, che s'io sostengo l'opinione del Sig. Nestore, non sostengo una eresia nella scuola Cartesiana.

E la

E la ragione mi par chiarissima: perciocchè allora per una causa effetto producesi, quando per essa s' introduce qualche mutazione nello stato de' corpi, per cui fare è necessario, ch' entri in azione, e che impieghi o in tutto, o in parte la sua energia. Ma mentre il corpo conserva quella forza, che ha, mentre non cangia velocità, qual mutazione s' introduce nel suo stato? nulla per certo: dunque ne v' ha bisogno d' azion di causa, ne nuovo effetto producesi nella natura. Quindi non approvo l' opinione del Wolfio, che azione, ed effetto vi riconosce, ne quella del Martini, che negando l' azione ammetre l' effetto.

C. Ma se non approvate l' opinione del Wolfio, almeno indicate nel suo discorso il paralogismo. Non è la medesima cosa, ch' io trasporti un corpo in un minuto per la lunghezza di questa stanza, e che lo trasporti la forza viva? E chi dirà, ch' io non agisca, e non produca vero verissimo effetto in così farto trasportamento?

L. Questi sono di quegli argomenti, che a prima vista fanno impressione, ed abbagliano: ma che bene considerati si ritrovano pieni di fallacia. Or io vi farò chiaramente vedere l' equivocazione, che in tal esempio nascondesi. O voi supponete il corpo grave, o no. Se è privo di gravità, vi dico ch' io non debbo agire se non per comunicare al corpo la forza necessaria, e per metterlo dallo stato di quiete in quello stato, per cui possa scorrere lo spazio dato in dato tempo: dopo di che non devo agire altrimenti, ma egli per se medesimo nel dato tempo scorrerà la lunghezza di questa camera. Ciò supposto l' azione consiste nel mutar lo stato del corpo, e nel dargli una determinata velocità, non nella continuazione del moto. Però in così fatta supposizione la cosa è pari, ne v' ha difficoltà di sorte veruna.

Ma se volete il corpo grave, mi conviene sicuramente usar forza nel sostentare la gravità del corpo, il quale, se non l' usassi, caderebbe per terra, e perderebbe il moto comunicatogli: il qual effetto dee seguire ancora nel corpo non portato dall' animale, quando non v' abbia una causa, che impedisca l' azione della gravità.

Questo sia detto nell' ipotesi, che il corpo muovere si dovesse in un mezzo non resistente: per altro se consideraste il

mezzo dotato di resistenza; questa converrebbe metter a computo, perchè a vincerla necessario ad una forza sarebbe entrar in azione.

C. Resto convinto, e l'esempio non prova nulla. Per altro mi sembra strano, che il moto, e la velocità d'un corpo non sia effetto della forza viva.

N. Ad istabilire quanto sin ora ha provato il Signor Lelio, abbiate pazienza di ascoltar ciò, ch'ora confusamente mi suggerisce la fantasia: e, se le cose vi sembreranno indigeste, discorrendovi sopra, proccuraremo di ordinarle. Che vi possa esser un effetto senza azione, comunque il creda il Signor Martini, io non potrò persuadermelo mai: perchè l'azione altro in fine non è, che l'esercizio della causa impiegata a produr l'effetto. Or nel moto equabile, finchè dura ad esser equabile, non mi pare, che la forza residente nel corpo possa entrar in azione. Conciossiachè non vi può esser azione senza reazione, ne questa senza causa reagente: ma nel moto equabile io non ritrovo causa di sorte alcuna, la quale esercitar possa la reazione contra della forza viva: dunque questa nel moto equabile non può in guisa alcuna agire.

C. Qual è la forza, che reagisce contra della gravità, o d'altra forza morta, mentre si accelera il movimento, e s'accresce la forza viva?

N. Quella che chiamasi forza d'inerzia, per cui il corpo fa sforzo di conservarsi in quello stato, in cui si ritrova.

C. E questa stessa forza d'inerzia dirò io, che reagisce contro alla forza viva nel moto equabile.

N. Ma non lo direte con verità: perchè niuna forza può reagire contro ad un'altra, se non opera con direzione contraria: ma la forza d'inerzia non può operare se non per quella direzione, per cui opera la forza viva. Conciossiachè ella studiasi di mantenere il corpo nello stato, in cui è; dunque non può agire se non per quella direzione, per cui il mobile viaggia, secondo la qual direzione convien, che agisca la forza viva, se mai agisce. L'inerzia dunque non può reagire nel caso nostro contro alla forza viva; ne altra forza può nel moto equabile ritrovarsi, che reagisca: dunque non essendovi azione, dove non v'ha reazione, non è possibile, che nel moto equabile la forza viva eserciti azione.

L. L'ar-

L. L' argomento, che fembra fondato fovra un' affioma del Caval. Newton dell' azione eguale alla reazione, del quale ci tornerà in acconcio di ragionar altre volte, ha il fuo vero, ma rimane inviluppato tra idee confufe, e intricate. Ricordatevi di ciò, ch' abbiam detto, che quando la forza agifce per accrefcere velocità al corpo, fi concepifce l' inerzia reagente contra di lei; e quando una forza reagifce per diminuirgli la velocità, fi concepifce l' inerzia agente contra di lei: e la potenza, che ha l' inerzia di efercitar cotal'azione fucceffiva, e continua è quella, che domandafi forza viva. E chi è, che non veda, che cotal potenza dell' inerzia di efercitare l' azione non può venire in atto, fe non le fi opponga alcuna forza, contro cui efercitarla. Ed a quefto fi riduce con chiarezza il difcorfo del Sig. Neftore.

Or io voglio rendervi la pariglia, ed in ricompenfa dell' ottimo argomento da voi recato a dimoftrare, che nel moto equabile non v' ha azione, amo di aggiungerne un altro, che fervirà ad abbattere la fentenza del Sig. Martini, il quale negando l' azione della forza viva nel moto equabile, non oftante giudica effervi effetto. Ora io domando, fe nel corpo viaggiante con una determinata celerità rifiegga, o no una forza determinata?

C. L' interrogazione non merita per mio avvifo rifpofta. Egli è certiffimo, che il corpo è dotato d' una forza determinata.

L. Se la forza è determinata, ne in effa avvi azion, che s' aumenti, non può a meno di non produr un effetto determinato: non è così?

C. Senza dubbio alcuno.

L. Di grazia mi dite, qual fia cotal effetto determinato nel moto equabile.

C. Vi diranno lo fpazio in un dato tempo trafcorfo.

L. E in qual tempo?

C. Sceglietene uno ad arbitrio. In un minuto fecondo di tempo.

L. E chi ha determinato così fatto tempo; e perchè non prendete per effetto di cotal forza lo fpazio paffato nella metà, o nella terza parte d' un fecondo, ovvero in due, o tre fecondi? Vedete dunque, che l' effetto di quefta forza, che voi

voi aſſegnate, non è in veruna maniera determinato, non eſſendovi maggior ragione di aſſumere lo ſpazio paſſato in un ſecondo, che in qualunque altro tempo: dunque queſto non è effetto della forza viva, che è veramente determinata.

C. Ma paragonate inſieme due corpi, che per ora poſſiamo ſuppor eguali, dotati di diverſe velocità, e vedrete, che tutte le coſe ſaranno determinate. Prendete qualunque tempo, che più vi piaccia, gli ſpazj da due mobili traſcorſi ſi ritroveranno ſempre in una ſtabile, e determinata proporzione, dalla quale non veggio, perchè non ſi poſſa raccogliere una ſtabile, e determinata proporzion tra le forze.

L. Credetemi, che all'argomento non è levata del ſuo nerbo ne pur una minima particella: perchè non ſolamente è determinata la proporzion delle forze, che in due corpi riſeggono; ma è determinata ancor la quantità della forza, che riſiede in un corpo ſolo: dunque non baſta, che determinata ſia la proporzion degli effetti, ma è neceſſario, che determinato ſia quell'effetto, che da una determinata forza viene prodotto: dunque, non potendo quello determinarſi nel moto equabile, ne ſegue, che in eſſo ad una forza determinata non corriſponda un effetto determinato.

N. Di fatto ſe un mobile urterà in una maſſa di ſevo con una determinata celerità, egli ſcaverà una foſſa d'una determinata grandezza, la quale non può eſſere ne maggior, ne minore. Quì sì, ch'io ritrovo un effetto determinato d'una cauſa determinata.

L. Ponderate tutte le coſe ſin or prodotte, ſi fa manifeſto, che nel moto equabile ne la forza viva entra in azione, ne produce effetto di ſorte alcuna. Che ſe taluno e l'azione, e l'effetto traſmetter voleſſe, io per me non ſaprei decidere qual de' due argomenti, portati l'uno da Carteſiani, l'altro dal Leibnizio, meriti maggior peſo. Ma egli ſarebbe ridicolo il ricercar qual meriti preferenza di due argomenti, che ſono appoggiati ad una ſuppoſizione, che è falſa.

N. La verità ſi è, che tanto la prova leibniziana, quanto la carteſiana è inſuffiſtente: e che, ſe vuolſi decidere la quiſtione, è d'uopo ricorrere ad altri mezzi, perchè il moto equabile non può ſomminiſtrare ragioni, che convincer poſſano un intelletto geometrico.

L. Con-

L. Conchiuderò per tanto i ragionamenti di queſto giorno col riflettere, quanto ſia inutile il metodo di coloro, i quali per decidere la noſtra controverſia riducono il moto accelerato, o ritardato al moto equabile, o conſiderandolo fatto per uno ſpazio, e tempo infiniteſimo, o ritrovando lo ſpazio, che con velocità coſtante in un dato tempo ſi paſſerebbe. Concioſſiachè altro non ſi fa, che ridurre il mobile ad uno ſtato, in cui è impoſſibile di rinvenire la giuſta miſura della forza viva: ſiccome abbiam dimoſtrato ſin' ora. E queſta rifleſſione getta a terra parecchi argomenti de' Signori Mairan, Martini, ed altri, che però non ci prenderem la cura di eſaminare più a lungo, avendo lor ſoddisfatto baſtevolmente.

N. Diamo dunque fine a' noſtri ragionamenti; ed il Sig. Ceſare porti domani le ſue ſperienze, ed il Sig. Lelio le ſue: giacchè per decidere una quiſtione fiſica non v' ha mezzo migliore, [illegible] la ſperienza. Ed io, cui certamente non ha convinto ciò, che dal moto equabile ſi è prodotto, verrò apparecchiato a rendermi a quel de' due, che le porterà più forti, e più convincenti.

GIOR-

GIORNATA SECONDA.

INTERLOCUTORI

Lelio, Nestore, Cesare.

N. VI ritroviamo molto attento, e occupato, e usate una diligenza, che è superiore al vostro costume. E a qual uso deve servire questa cassetta ripiena, s' io non m' inganno, di sevo, e queste palle, che sovra di lei stanno sospese a diverse altezze?

L. Non toccate di grazia, acciocchè non mandiate a male il lavoro di più ore. Questa è la preparazione d' uno sperimento, il quale voglio, che insiememente prendiamo; acciocchè non siamo di quegli, che veggono unicamente cogli occhi altrui, ma amo, che veggiamo co' nostri. Trattanto assidetevi, o Signori, intorno a questo tavolino.

C. Pensate forse di decidere la quistione a forza di sperimenti? Questi io li riceverò volentieri; dirò, che le fosse scavate nella materia cedente, ed altri somiglianti effetti sono sempre in ragion semplice delle masse, e duplicata delle velocità: ne per questo ammetterò per buona la conseguenza, che le forze vive sono nella stessa ragione: perocchè converrà aver riguardo al tempo, in cui si scavano le fosse, e gli altri effetti producónsi; il quale se mettasi a computo, saremo costretti a raccogliere dagli sperimenti conseguenze onninamente diverse.

L. Non m' è ignoto, che il tempo è l' ancora sagra, a cui vi affidate: contuttociò in oggi mio disegno si è di non entrare in niuna guisa nella contesa, ma di fermarmi unicamente ad espor ciò, che si vede cogli occhi, e che la sperienza dimostra, e che dalle teorie certe, e ricevute da tutti concordemente con evidenza raccogliesi.

N. Così in questo giorno non assisteremo ad una disputa, ma udiremo la storia di ciò, che s' è fatto, a fine d' aver lume per decidere la quistione.

L. Incominciamo dalla teoria. A questo fine io formo due corpi *m*, M (*Fig.* 1, 2) di qualunque massa, i quali, come vede-

vedete, terminano in parecchi cilindri squisitamente eguali, ma di numero disuguali. Se questi cadano colle punte cilindriche in una materia molle, come nel sevo, o nella creta a sufficienza bagnata, questa resisterà al moto loro, e non v' ha dubbio, che le resistenze loro proporzionali non sieno al numero delle punte, quando i corpi sieno arrivati ad eguale profondità. Ma per ora volendo far uso della teoria, supporremo una materia dotata d' una resistenza costante in tutti i luoghi, dove i corpi ritrovansi. Ciò preparato si chiamino m, M le masse de' corpi; le velocità, onde incominciano ad iscavar le fosse c, C; le resistenze r, R. Le profondità delle fosse scavate sieno mn, MN, che chiameremo n, N. Queste le rappresento maggiori del dovere nella figura, perchè essa riesca più distinta. Si prendano gli spazj ms, MS proporzionali alle profondità delle fosse mn, MN, e si chiamino ns, Ns. Si avrà per le note formule del Galileo $rnds = -mudu$, $RNds = -MVdV$: dunque integrando coll' aggiunta delle necessarie costanti, si avrà $rns = \frac{mc^2 - mu^2}{2}$, $RNs = \frac{MC^2 - MV^2}{2}$. Si aggiungono quelle costanti, le quali, fatta $u = c$, ed $V = C$, diano $s = o$: ma terminate le fosse u, ed $V = o$, e $ns = n$, $Ns = N$: dunque $rn = \frac{mc^2}{2}$, e $RN = \frac{MC^2}{2}$: dunque $mc^2 : MC^2 :: rn : RN$.

Ecco pertanto, che la profondità delle fosse per la costante resistenza moltiplicata, che altro non è, se non l' effetto, che si vede, e che si tocca con mano, riesce proporzionale alla massa, ed al quadrato della velocità. Che se nell' un caso, e nell' altro le resistenze fossero eguali, le sole profondità delle fosse sarebbero nella stessa ragione.

N. La cosa mi par dimostrata: e questa è una grande premessa per ricavare la conseguenza in favor de' Leibniziani.

L. Il Sig. Cesare s' alzerà in piedi gridando, che per noi si prescinde dal tempo, e avrà ragione. Ma per poter molte cose ne' dì seguenti trattare, permettetemi, ch' io faccia una non inutile digressione, nella quale disamini in quai tempi si formino le fosse, di che abbiamo parlato. Concepite le cose, come sopra, con questo sol di divario, che le velocità iniziali le chiamo u, V, e ms, MS sono elementi infinitesi-

mi, che però chiamo nds, Nds. Per la teoria delle forze continuamente applicate, si ha $rnds = -mudu$, $RNds = -MVdV$: dunque $ds = \frac{-mudu}{rn}$, $ds = \frac{-MVdV}{RN}$: dunque $\frac{-mudu}{rn} = -\frac{MVdV}{RN}$: e passando all'analogia $-du : -dV :: \frac{MV}{RN} : \frac{mu}{rn}$, ovvero $:: \frac{rn}{mu} : \frac{RN}{MV}$. Ma si è dimostrato essere $mu^2 : MV^2 :: rn : RN$; dunque si avrà $u : V :: \frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}}$. Surrogando pertanto nell'antecedente analogia la proporzione delle velocità, sarà $-du : -dV :: \frac{rn\sqrt{m}}{m\sqrt{rn}} : \frac{RN\sqrt{M}}{M\sqrt{RN}} :: \frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}}$. Dunque i decrementi delle velocità per gli elementi ms, MS sono come le velocità iniziali: dunque anche i residui, cioè le velocità ne' punti s, S sono nella stessa ragione. Il qual discorso ripetuto ancor negli elementi susseguenti fa vedere, che presi quali si vogliano spazj ms, MS proporzionali all' intere profondità delle fosse, le velocità ne' punti s, S sono sempre in ragion data di $\frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}}$.

Ciò dimostrato s'intendano divise le profondità mn, MN in un egual numero d'elementi, che sieno in ragione delle stesse profondità, onde si esprimano per nds, Nds, e si chiamino i tempi per così fatti elementi dt, dT. Si avrà $dt : dT :: \frac{nds}{u} : \frac{Nds}{V} :: \frac{n}{u} : \frac{N}{V} :: \frac{n\sqrt{m}}{\sqrt{rn}} : \frac{N\sqrt{M}}{\sqrt{RN}} :: \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$, la qual ragione essendo costante, ne consegue, che i tempi interi serberanno la stessa ragione $t : T :: \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$. Soprassedo dal dedurre i corollarj, perchè gli importanti sarà d'uopo altrove considerare.

C. Non per contraddire ad una teoria, che è verissima, ma per non lasciar addietro ciò, che pur da taluno è stato sospettato, obbietterò, che per voi sonosi applicate alla resistenza della materia molle, e cedente quelle stesse formule, le quali si raccolgono dalla teoria galileana della gravità. Vi sarà taluno, e non dispregevole, o di nome oscuro, ma profondo, e dotto, che ammettendo quelle formule riguardo alla

alla gravità, non le riconoſcerà per vere riguardo alla reſiſtenza della materia cedente. La formula $r\,dt = -m\,du$, da cui deriva l'altra $r\,ds = -m\,u\,du$, vale quando per la ſpezie r s' intenda la gravità, la quale paſſa ad eſſer reſiſtenza, quando il mobile aſcende: perchè la gravità è di tal natura, che eſercita la ſua azione in proporzione de' tempi. Ma la reſiſtenza della materia molle, e cedente eſſendo di tal natura, onde l'azione per lei s' eſercita in proporzion degli ſpazj, non ammette l'antecedente formula, ma in luogo ſuo ſi debbe ſoſtituir la ſeguente $r\,ds = -m\,du$; della quale ſe facciaſi uſo, ſi troverà, che la reſiſtenza per la profondità della foſſa ſarà non come la maſſa moltiplicata nel quadrato della velocità iniziale; ma come l'iniziale quantità del movimento.

Eccovene il calcolo: chiamata la profondità della foſſa $= n$, e la velocità iniziale $= c$. Poichè ſi ha $r\,ds = -m\,du$, integrando coll' aggiunta della coſtante, ſi otterrà $rs = A - mu$: ma ſe $s = o$, $u = c$; dunque $A = mc$: e però la vera formula ſarà $rs = mc - mu$: ma poſto $s = n$, deve eſſere $u = o$: dunque $rn = mc$. Come ſi dovea dimoſtrare.

L. Laſciando da parte la ragione addotta, che in oggi mi ſon propoſto di non eſaminare, vedrete tra poco, quanto a queſte voſtre concluſioni le ſperienze ſieno contrarie: e dalle ſperienze, che moſtrano ſempre l'effetto proporzionale alla maſſa nel quadrato della velocità, io prenderò il più orte argomento per abbattere così fatte ſpeculazioni.

In tanto mi ſtudierò di ridur la coſa ad una ſpecie d'aſſurdo, facendo vedere, che a ſcavare qualunque foſſa, neceſſario ſarebbe un tempo infinito. Conciosſiachè eſſendo $r\,ds = -m\,du$, e $ds = u\,dt$; ſi avrà $r\,u\,dt = -m\,du$, ovvero $dt = \frac{m}{r} \cdot -\frac{du}{u}$. Queſta formula, la quale appartiene alla logaritmica, ſi deve coſtruire per modo, che, poſto $t = o$, ſia $u = c$.

Sia AM l'aſſintoto della logiſtica (*Fig.* 3); ſi ecciti ad angolo retto l' $AC = c$, e colla ſottotangente $= \frac{m}{r}$ deſcrivaſi la logiſtica CN. Chiara coſa ſi è, che le AM rappreſentano i tempi, le MN le velocità reſidue: ma eſſendo la curva aſſintota, MN non può divenir nulla, ſe AM non diviene infinita: dunque la velocità non ſi annulla, e per conſeguenza

la fossa non rimane interamente formata, se non dopo un tempo infinito.

N. Se la velocità può conservarsi la stessa per un tempo infinito, e qual assurdo è mai, ch' essa s' estingua in un tempo infinito?

L. In ciò io non colloco l' assurdo, non essendo inverisimile, che v' abbia un qualche genere di resistenza, la qual non estingua il moto, se non dopo un tempo infinito. Ma la conclusione sembrami opposta ai moti, che nella natura s' osservano, i quali anzi s' estinguono in un tempo brevissimo. Ma se questo assurdo non vi convince, vi renderete almeno alla sperienza, la quale è contrariissima all' esposta supposizione.

Prima però, che ad essa venghiamo, permettetemi, ch' io dica due parole intorno ad uno sbaglio preso dal celebre Leibnizio, e notato dal Cav. de Louville, ove vedrete, che questo gentiluomo era appunto del sentimento, che è stato or ora esposto dal Sig. Cesare, cioè che la velocità perduta, supposta la resistenza costante, sia in ragion degli spazj passati.

Distingue il Leibnizio due generi di resistenza, assoluta l' una, l' altra respettiva. L' assoluta è quella, che distrugge sempre egual porzione di forza, o maggiore, o minore sia la velocità del mobile; e tale pensa egli esser quella, che proviene dalla tenacità del mezzo, e dalla frizione. La respettiva si è quella, che quanto è maggior la velocità, tanto consuma nel mobile maggior forza; e tale giudica esser quella, che dalla densità del mezzo proviene.

Fatta cotal divisione, egli s' inoltra a parlare del movimento, che per se sarebbe equabile, quando venga dall' assoluta resistenza ritardato: nella qual' ipotesi i decrementi delle forze devono essere agli incrementi degli spazj proporzionali. E sopra questa pianta egli fonda il seguente teorema, e così lo dimostra.

Le velocità sono proporzionali agli spazj, le perdute ai passati, le rimanenti a que', che si devono scorrere. Si pongano eguali gli incrementi degli spazj, le diminuzioni delle forze saranno eguali: ma se eguali sono le perdite delle forze, lo saranno altresì le perdite delle velocità (giacchè le forze sono come i quadrati delle velocità, ed essendo eguali i quadrati, anche i lati è necessa-

cessario, che sieno eguali) dunque gli elementi delle velocità perdute sono come gli elementi degli spazj passati, e gli elementi de' residui delle velocità, come gli elementi degli spazj, che si devon passare: dunque le velocità come gli spazj. A cagion d' esempio la velocità iniziale sia AE, (*Fig.* 4) *lo spazio da passarsi nel mezzo resistente sia* AB, *la parte passata* AM, *quella, che rimane a passare* MB, *la velocità nel punto* M *sia* MC, *ovvero* AF, *la perduta* FE, ECB *sarà una linea retta.*

Avete udita la dimostrazione del Leibnizio: ascoltate la critica del Cav. de Louville. Giudica egli esservi una manifesta contraddizione tra il presente teorema del Leibnizio, e la sua opinione intorno alle forze vive: poichè il teorema non può esser vero, se le forze non sono come le semplici velocità. E la ragione si è, perchè per l' ipotesi le forze diminuiscono, come si aumentano gli spazj: dunque accrescendosi gli spazj in continua ragione aritmetica, le forze nella stessa ragione dovranno diminuire: dunque queste forze verranno rappresentate dalle ordinate ad una linea retta; ma per lo teorema del Leibnizio le velocità dalle stesse ordinate si rappresentano: dunque le forze sono come le velocità, e non punto come i loro quadrati; perchè se ciò fosse, le velocità verrebbero espresse per l' ordinate ad una parabola, non ad una linea retta. Nè giova il dire ciò, che il Leibnizio ha inserito tra i due segni della parentesi, che le forze sono come i quadrati delle velocità, e se i quadrati sono eguali, i lati lo saranno altresì. Conciossiachè non si tratta punto quì di quadrati eguali, ma di quadrati, che vanno di continuo diminuendo in una certa ragione. Or i quadrati diminuendo in proporzione aritmetica de' numeri 4, 3, 2, 1 i lati diminuiranno in altra progressione, cioè, $\sqrt{4}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{1}$: dunque il principio della forza viva leibniziana vien distrutto dal teorema delle resistenze assolute. Questa è la critica del Louville.

N. Io voglio fare una solenne rinunzia alla geometria, se vi riesce di liberar il Leibnizio da paralogismo. Non lo farete no; quando anche adopraste tutte le macchine d' Archimede.

L. Che il Leibnizio abbia preso uno sbaglio è così certo, come è certo, ch' egli è uomo di profonda scienza. Il teorema

rema delle refiftenze affolute è onninamente oppofto al fuo principio delle forze. Ma quale de' due è falfo? Il Louville conclude, che è falfo il principio delle forze vive: ed io all' oppofito fon d' avvifo, che fia falfo il teorema, e che la perdita del quadrato della velocità, non la perdita della velocità fia proporzionale agli incrementi degli fpazj: onde la formula non fia $rds = -mdu$, ma $rds = -mudu$. Entriamo dunque più addentro nella materia, e veggiamo qual cofa la fperienza c' infegni.

C. Si reputi dunque come ftabilito tra noi trè, che quando la fperienza faccia vedere, che gli effetti fieno, prefcindendo dal tempo, come le maffe, ed i quadrati delle velocità, tutte le rifpofte fin ora date contra del voftro raziocinio fon nulle, e che fa di meftieri ammettere la formula $rds = -mudu$, ficcome un principio incontraftabile, e vero. Ed io fenza controverfia ve lo concederei di buon grado: ma farà bene, che il Sig. Neftore vegga profondamente ogni cofa. E quale farà il primo fperimento, che produrrete? forfe quello del Marchefe Poleni, che con tanto applaufo è ftato ricevuto univerfalmente?

L. Può effere: ma prima amo, che fi efamini una quiftione di metodo; cioè qual fia nella noftra materia la miglior maniera di fperimentare. Non è bene imitare un coftume tra gli odierni filofofanti pur troppo fparfo, i quali moltiplicano a difmifura gli fperimenti fenza aver mai penfato ne alla materia, che vuolfi adoperare, ne alle circoftanze neceffarie per fargli bene. Onde avviene, che il numero immenfo degli fperimenti non folo non dà chiarezza al fuggetto, di che fi tratta, ma anzi lo rende più inviluppato, e confufo.

Adunque ad aver precifa mifura dell' effetto, che la forza viva produce, bifogna in prima effer certo, che tutta la forza fi fpenda, fi confumi, e s' impieghi nella produzione di quell' effetto, che fi mifura. Però fe noi lafciamo cader una palla fopra qualfifia materia per averne una foffa, dalla cui grandezza fi voglia la forza della palla ftimare, fa di meftieri, che la foffa fia l' unico effetto di quella forza per modo, che niuna particella fe ne fia in altro effetto impiegata. Voi ne vedete fubito la ragione. Perocchè l' energia della caufa venendo in due effetti divifa farebbe fempre maggiore della gran-

dezza

dezza d' uno di questi effetti. Dietro a questa riflessione io giudico, che il sevo, o la creta a sufficienza bagnata sia la più opportuna materia, sopra cui i mobili cadendo scavino le fosse loro; perocchè non avvi effetto fuor della fossa, in cui si divida l' energia della causa.

N. Non bisogna dunque mettersi in pena, se in alcuni sperimenti fatti da un mio amico la proporzion degli effetti non sia esattamente come le masse ne' quadrati delle velocità; benchè moltissimo vi si accosti. Lasciava egli cader le palle nella farina, e nella polvere di diversi generi. E chi non vede, che mentre il mobile urta in cotai materie alza in aria una densa nube, nel qual effetto parte della causa deve impiegarsi: onde la fossa nella polve, o nella farina scavata non è l' unico effetto della forza viva, che risiede nella palla.

L. E pure queste stesse sperienze, benchè mancanti, se non si accordano esattamente colla proporzion de' quadrati delle velocità, discordano per guisa dalla proporzion delle velocità, che da esse potrebbesi agevolmente provare, quanto ho detto innanzi. Ma non interrompiamo, che bisogno non abbiamo di tai minuzie.

L' altra cosa da avvertirsi si è, che per lo sperimento riesca nota la proporzion degli effetti. Cada a cagion d' esempio una stessa palla da diverse altezze, e scavi nel sevo, o nella creta due fosse d' ineguale profondità. Possiamo dalla grandezza cognita delle fosse ricavar la proporzion degli effetti? Sarebbe cosa agevole, quando a qualunque profondità le parti della materia cedente s' opponessero con egual energia, e resistenza alla forza della palla cadente: perciocchè in tal' ipotesi gli effetti sarebbero come il numero delle parti cacciate di luogo, cioè come la grandezza delle fosse. Ma chi è, che non sappia, che quanto più la palla si abbassa nel sevo, tanto più lo condensa, e quanto questo è di maggior densità fornito, tanto maggiormente resiste: onde non solamente a misurare gli effetti è necessario por mente al numero delle parti, ma ancora all' energia, onde ciascuna resiste: e siccome non è nota la legge, con che le parti più profonde, e condensate resistono, così non abbiamo sicuro metodo di conoscere la proporzion degli effetti. Quindi miglior consiglio penso, che sia, il disaminare, se ottener si possano fosse eguali, per cui siam certi, che gli effetti pur sieno eguali.

Ed

Ed acciocchè la sperienza sia più compiuta, e sicura, proccureremo, che qualunque impedimento straniero riesca del pari e per l'una parte, e per l'altra. Laonde non solo si adopreranno palle di egual diametro, ma fatte della stessa, o di somigliante materia, ed egualmente, per quanto è possibile, levigate: onde altro divario tra lor non passi, se non che una sia solida, l'altra cava al di dentro. Ed acciocchè la resistenza dell'aria non turbi la proporzione di quelle velocità, con che incominciano a scavar le fosse, le formeremo d'un metallo per rispetto all'aria molto pesante. Con queste avvertenze penso, che otterremo la sperienza più adatta a decidere la quistione.

C. A decidere la quistione non penso io già; ma soltanto a stabilire la vera proporzion degli effetti prescindendo dal tempo, in cui si vanno formando. Perciocchè stabilita ancor questa, verrà in mezzo il tempo a turbar il fine de' vostri raziocinj. Per altro le avvertenze fatte fin' ora sono sì opportune, che nulla più.

L. Con questo raziocinio prescielse il dottissimo, ed accuratissimo Sig. Marchese Poleni a tutti gli altri modi di prendere le sperienze quello, che leggesi nel libro de Castellis pag. 56. Leggete.

N. *Un vaso riempito di sevo rappreso*, dice egli, *avea fermato con de' chiodi ad un equabile, ed orizzontal pavimento per guisa, che la superficie del sevo, la qual piana era, fosse in ogni sua parte dalla superficie del pavimento egualmente distante. Fatti avea fabbricare due globi eguali, de' quali l'uno era di piombo, l'altro di ottone; e questo nel mezzo aveva una cavità; onde pesando quello due libbre, questo ne pesava solamente una. I due globi sospesi dalla soffitta stavano a piombo sopra il vaso, in cui era il sevo, e la distanza dalla superficie del sevo del più leggiero doppia era di quella del più grave. Tagliati i fili, e cadendo i globi nel sevo si formarono fosse simili, e perfettamente eguali. Le quali danno manifestamente a divedere, che il corpo d'una libbra, cadendo per uno spazio, che viene misurato dal numero due, produce lo stesso effetto, che il corpo di due libbre cadente per uno spazio misurato dall' unità.*

L. Ecco l'esito dello sperimento, per cui vedesi, che posti

poſti eguali i prodotti delle maſſe nell' altezze, o ſia ne' quadrati delle velocità, rieſcono perfettamente eguali le foſſe, e per conſeguenza eguali gli effetti: e perchè veggiate, che l' eſito alla fortuna attribuir non ſi deve, leggete quì dopo poche righe.

N. *Ne una volta ſola*, ſegue il Poleni, *preſi lo ſperimento, ma più fiate, cangiando palle, cangiando diſtanze, cangiando la materia, in cui le palle cadevano, e ſoſtituendo or loto, or molle cera. Dall' egualità degli effetti coſtantemente oſſervata ho appreſo eſſer ſempre invariabile la maniera, che la natura tiene nell' operare.*

L. Chiudiamo ora il Poleni, e prendiamo in mano lo s' Graveſande, e veggiamo, quali ſperimenti gli ſomminiſtri la macchina per lui inventata. Eſporrò l' eſito dello ſperimento, le cui circoſtanze potrete per voi medeſimi leggere nell' autore. Prende tre palle A, B, C d' egual diametro l' ultima ſolida, l' altre due ſcavate di dentro per modo, che le gravità loro ſieno come 1, 2, 3, ed accomodata la macchina per modo, che li poſſa laſciar cadere dall' altezze 1, 2, 3, 4 ritrova, che ſcavano le foſſe, che chiameremo M, N, P, Q, R, come nella ſeguente tavola appariſce. Ecco l' eſito dello ſperimento.

Se le palle cadono dall' altezza = 1, ſcavano le foſſe

A = 1	M
B = 2	N
C = 3	P

Se le palle cadono dall' altezza = 2, ſcavano le foſſe

A = 1	N
B = 2	Q
C = 3	R

Se cadono le palle dall' altezza = 3, fanno le foſſe

A = 1	P
B = 2	R

Se cade la palla dall' altezza = 4, fa la foſſa

A = 1	Q

Queſta tavola mette con chiarezza ſotto degli occhi l' eſito dello ſperimento. La ſteſſa foſſa N è formata dalla palla = 2, che cade dall' altezza = 1, e dalla palla = 1, che cade dall' altezza = 2. La foſſa P è formata dalla palla = 3

cadente dall'altezza = 1, e dalla palla = 1 cadente dall'altezza = 3. La fossa Q dalla palla = 2 cadente dall'altezza = 2, e dalla palla = 1 cadente dall'altezza = 4. Finalmente la fossa R dalla palla = 3, che cade dall'altezza = 2, e dalla palla = 2, che cade dall'altezza = 3. Ne' quai casi chiaramente si vede, che allora si producono fosse eguali, quando i corpi cadono da altezze tali, che sono in ragion reciproca delle masse.

La stessa sperienza riuscì al Sig. Martini, il quale lasciò cadere due palle l'una di metallo, l'altra di legno da altezze, che erano reciprocamente come le masse, sopra l'arena di fiume: ma ingenuamente confessa, che la fossa fatta dalla palla di legno riuscì un poco più picciola dell'altra, e ne attribuisce la cagione alla resistenza dell'aria, la quale abbia recato più d'impedimento alla palla di legno, che a quella di metallo.

N. Potrebbe esser ancora, che questa picciola, ed insensibile differenza sia provenuta dalla materia, in cui furono scavate le fosse: perciocchè è impossibile, che qualche parte di essa non siasi alzata per l'aria, e tanto maggiore, quanto maggiore è la velocità del mobile, che in lei fa impressione.

L. Dopo così sicure sperienze, voi ben vedete, che se la palla più grave si lascierà cadere da una altezza minore, che sia terza proporzionale dopo le altezze fin ora considerate, farà una fossa molto minore: ma in questa novella ipotesi le masse sarebbero in ragion dimidiata reciproca dell'altezze, cioè in ragion semplice reciproca delle velocità: dunque quando le masse sono in ragion reciproca delle velocità, disuguali fosse si scavano, e maggior la forma il corpo più leggero, che da maggior altezza discende. Ma alzatevi, e venite a vedere cogli occhi vostri la verità delle sperienze.

Pesate prima queste due palle A, V (*Fig.* 5) ponendole sopra le due lance di questa bilancia esattissima; fanno equilibrio tra loro. Pesate la palla B..... Così sta in equilibrio. Collocate la palla B insieme col suo contrapeso in una stessa lance, e vedrete, che fa equilibrio tanto colla palla V, quanto colla A.

C. L'equilibrio non può essere più esatto: abbiamo dunque due palle A, V eguali, ciascuna delle quali è doppia in gravità

gravità della palla B: questa m'immagino sarà vuota al di dentro. Ma sono elleno squisitamente d'egual diametro?

L. Potete misurarle col compasso ricurvo.

C. Va bene.

L. Ma se volete meglio accertarvene, fatele passare per questo foro circolare, e vedrete, che lo imboccano per guisa, che non possono andar più strette.

C. Diligenza maggiore non si potrebbe pretendere da uno scrupoloso.

L. Questa cassetta FQ, che è collocata parallela all' orizzonte, è riempita di sevo, ma per modo, che le sue sponde sieno più alte della superficie del sevo alquanto meno, che non è il diametro delle palle. Alle sponde appoggiasi il regolo LM, il quale si può muovere innanzi, e indietro, e in movendosi, si mantiene sempre all' orizzonte parallelo. Prendete il livello, e osservate, se il tutto stia orizzontale.

C. Non v' ha luogo, in cui il livello non batta giusto.

L. Non rimane altro per sicurezza dello sperimento, se non che misuriate, in qual distanza dalla superfice del sevo stiano le palle pendenti da' fili loro.

C. La distanza della palla B è doppia della distanza della palla V; ma quella della palla A è la metà di quella della palla V, o sia la quarta parte di quella della palla B.

L. Date fuoco al filo, che sostiene la palla V.... Fate lo stesso al filo della palla B.... Formate le fosse, esaminiamo, se le due palle sansi profondate egualmente. Muovete il regolo LM, che stia sopra di esse. Osservate, come passa sopra amendue per guisa, che le rade senza toccarle: segno manifestissimo, che sonosi profondate egualmente, ed hanno formata una fossa eguale. Date ora fuoco all' ultimo filo, e lasciate, che ancor la A scavi la sua fossa... Muovete ora il regolo LM; vedete, come urta notabilmente nella palla A: dunque la fossa da essa scavata è minore dell' altre due.

N. La sperienza è riuscita felicemente.

L. Avea prima tutte le cose preparate, e disposte con diligenza, e più d'una volta ho tentato lo sperimento senza compagni. Conchiudiamo dunque esser vero, che fosse eguali si ottengono, quando eguali sieno i prodotti delle masse ne'

H 2 qua-

quadrati delle velocità: dunque per quel, che appariſce da queſto primo ſperimento, gli effetti ſono proporzionali non alle quantità del movimento, ma alle maſſe ne' quadrati delle velocità.

N. Avete con prudenza detto per quanto appariſce da queſto primo ſperimento; perchè il fondare ſopra una ſola ſperienza un canone generale mi ſembrerebbe anzi temerità, che franchezza.

L. E pure queſta ſola ſperienza getta a terra l'opinion di quelli, che vogliono le forze in ragion delle maſſe, e delle velocità, rovina la difeſa del Louville, che nelle reſiſtenze aſſolute i decrementi delle velocità ſono proporzionali agli incrementi degli ſpazj; mentre in queſta ſentenza, ſiccome abbiam dimoſtrato, dovrebbero ottenerſi forze eguali, quando eguali ſieno i prodotti delle maſſe nelle velocità: e per conſeguenza queſta ſola ſperienza dà a divedere, che in ogni genere di forze acceleratrici, e di reſiſtenze vagliono i canoni ricavati dalla teoria del Galileo.

Per altro entriamo ancora nella diſcuſſione degli altri ſperimenti, e vedrete, che più d'aſſai ſi avvicinano alla mia aſſerzione, che all'oppoſita. Diſaminiamo dunque quello, che leggeſi nel P. Riccioli Apo. Cap. 3 prop. 6 N. 24.

C. La quarta maniera, così s'eſprime il Riccioli, *abbiſogna non d'un corpo fluido, qual è il liquore, ma d'una materia molle, e cedente, qual è la cera, il ſevo, il loto cretoſo, il butirro rappreſo, od altre ſomiglianti materie: Perciocchè ſe, ſpianata di cotai materie la ſuperficie, ſi pianti in eſſe uno ſtilo acuto nell'ultima parte, e nell'altre parti cilindrico, al quale ſia unita ad angoli retti, come una ſcodella, nella quale da una determinata altezza cada un globo, la cui metà ſi addatti bene alla cavità della ſcodella, ma cada eſattamente a perpendicolo. Si potrà notare quante particelle dello ſtilo per la caduta del globo entrino dentro nel ſevo, o nella cera, e cangiate le altezze, d'onde il mobile cade, notar ſi potrà, quanto per la più lunga caduta, più ſi profondi lo ſtilo nella materia omogenea. Abbiamo fatto uſo di diverſi tubi metallici di egual altezza, e groſſezza pieni di ſevo prima ſquagliato, indi rappreſo, ed un globo di legno di noce, che peſava ſei oncie, abbiamo laſciato cadere ſovra la ſcodella da quattro altezze,*

tezze, e notato quante particelle dello stilo per la forza del globo siensi immerse. Queste le vedrete nella seguente tavola.

Altezza della caduta Dita	*Particelle immerse nel sevo per la percossa del globo*
8	40
32	115
72	196
128	278

Cioè cadendo il mobile dall' altezza di dita, o oncie romane otto, s' immergon nel sevo quaranta di quelle particelle, delle quali un' oncia del piede romano ne contien otto: e così degli altri casi.

Quì per quanto vedo, o Signore, la sperienza non favorisce molto l' opinione del Leibnizio anche prescindendo dal tempo. Concioſſiachè le quattro altezze, da cui il mobile cade, sono nella proporzion, che noto in questa prima colonna: dunque se le parti immerse serbassero la ragion de' quadrati della velocità del globo cadente, dovrebbero esser tante, quante nella seconda colonna s' esprimono. E queste sono molto diverse da quelle, che nell' esperimento s' ottengono.

Proporzion dell' altezze	*Numero delle parti, che dovrebbero immergersi servandosi la proporzion* de' quadrati delle velocità	*delle velocità*
1	40	40
4	160	80
9	360	120
16	640	160

N. Aggiungete una terza colonna, e notate quali dovrebbero esser le parti immerse giusta l' opinione del Cav. de Louville: ed

ed eccole quì aggiunte nella terza colonna. Osservate, che queste sono molto minori di quelle, che ci fornisce l'esperimento. Però se a cotale sperienza toccasse la decisione, non avrebbe ragion di trionfare più l'una parte, che l'altra.

L. Io non mi appago di questa vostra concordia: anzi pretendo, che la sentenza, ch'ora sostengo ne possa, e ne debba trarre grande profitto. Perciocchè se essa è vera, la sperienza deve riuscire, come riesce di fatto, ma non già se vera sia l'opinion del Louville. Conciossiachè nel metodo di sperimentare usato dal Riccioli, tre irregolarità considerare si vogliono. La prima, che quanto più il cilindro s'abbassa nel sevo, tanto maggiormente lo condensa, e perciò trova più di resistenza: la quale se ben si diminuisce colla figura acuta, in che finisce il cilindro; pure non si toglie mai abbastanza. S'aggiunga, che quanto maggior parte del cilindro è immersa, tanto maggior quantità di frizione al movimento reca impedimento: e questa irregolarità comunque sia meno considerabile dell'altre due, che soggiungerò, pure essa ancora opera qualche cosa. La seconda si è, che quanto il globo da maggior altezza discende, tanto più a proporzione perde per la resistenza dell'aria di quella velocità, che avrebbe acquistata nel vano: e questa maggior perdita deve nello sperimento riuscire molto considerabile, perchè si è adoperata una palla di legno, che è molto leggiere, e che perde molto per la resistenza dell'aria. Quindi è, che la palla cadente da maggior altezza riceve tale velocità, la quale è alla velocità della palla, acquistata per minor altezza, in minor ragione, che la dimidiata dell'altezze medesime. L'ultima irregolarità si è, che non tutta la forza viva della palla cadente si consuma nello scavar la fossa; perciocchè cadendo nella scodella metallica, che il Riccioli chiama latinamente scafio, non può a meno, che non rimbalzi, o non si ammacchi, e tanto maggiormente a proporzione, quanto da maggior altezza discende. Ciò supposto, voi ben vedete, che le fosse nella sperienza formate devono essere minori di quelle, che somministra la vera teoria. Osservate ora le tavole, e sappiatemi dire in quale delle due teorie ciò si verifichi.

N. Io veggio assai, che quando si togliessero tutte quelle resistenze, che toglier si possono, la proporzion delle fosse si

ap-

appressarebbe alla proporzion dell'altezze, per le quali il globo discende. Onde non mi maraviglio, che la più parte de' Signori Cartesiani abbia ricevuto un tal teorema senza difficoltà.

C. Ritrovo, che il Sig. Martini, colla sperienza alla mano, contraddice a quanto voi dite. Imperciocchè lascia egli cadere lo stesso mobile da ineguali altezze sopra la sabbia di fiume, e ritrova, che le profondità delle fosse sono in ragion dimidiata delle altezze: avvertendo, che quella, che viene scavata dal mobile cadente da maggior altezza, è alquanto minore, e ne attribuisce la cagione alla maggior condensazion della sabbia.

L. Sig Nestore, acciocchè veggiate per voi medesimo, quanto vaglia l'esposta sperienza, non altro voglio dirvi, se non il metodo, onde misura il Martini le profondità delle fosse. Descritto il circolo ABCD, (*Fig. 6*) il cui diametro eguaglia il diametro del globo cadente, misura esattamente la massima larghezza, o sia il diametro della fossa, e tal larghezza accomoda al circolo in AC, la qual tagliata egualmente in E, conduce per lo centro O la retta BD, indi misura la profondità della fossa col seno verso BE.

C. E non è questo un metodo sicuro, e elegante per misurare della fossa la profondità?

N. Di ciò non credo dubiti il Sig. Lelio. Fin ora sonosi per noi considerate fosse, le quali o conservassero sempre la stessa larghezza, oppure respettivamente in eguali profondità fossero egualmente larghe; laonde ci è stato lecito di misurare gli effetti per le resistenze, e le profondità delle fosse, ed essendo eguali le resistenze, per le semplici profondità. Ma quì io non vorrei, che il dotto Autore misurasse gli effetti per le sole profondità delle fosse omettendone la larghezza, la quale essendo variabile fa, che la resistenza ancor sia variabile. E chi è, che non veda, che quanto più il mobile si profonda tanto allarga più la sua fossa, e per conseguenza più ritrova di resistenza, e certo si è, che il mobile da maggior altezza cadente più s' immerge dentro nella sabbia.

L. Voi al presente toccate il punto. Veracemente in prima, quando secondo la nota formula $r\,dt = -m\,du$ misura la perdita della quantità del movimento, che per lui è la

forza

forza del globo cadente, computa la ſpecie r, come proporzionale a quella parte della ſuperficie del globo, che è immerſa nell'arena: il qual computo, comunque non mi appaghi, perchè tal reſiſtenza può eſſere unicamente quella, che naſce dalla frizione, ma non quella che naſce dallo ſcacciar di luogo tanta quantità di materia, quanta è la parte del ſolido, che novellamente ſommergeſi: pure vedete, che non traſcura la larghezza delle foſſe. Ma quando raccoglie l'ultime conſeguenze dal ſuo diſcorſo, ſtabiliſce le forze eſſer in ragion delle maſſe, delle profondità delle foſſe, e del tempo. Dall'elemento del tempo per ora facciasi preciſione; di quel delle maſſe, che è una particolar opinione di queſto Autore, biſognerà parlarne in altro luogo. Quanto al ſecondo egli contraddice a ſe ſteſſo, e alla verità. A ſe ſteſſo, perchè avendo fatte le reſiſtenze elementari, come le ſuperficie ſommerſe della palla, non potrà mai provare, le ſomme loro eſſere, come le profondità delle foſſe: alla verità, perchè ſi dee metter in computo tutta la quantità della ſabbia ſcacciata di luogo. Laonde vedete, qual conto far ſi debba del raziocinio del Martini, mentre per tanti capi vacilla.

N. Poſte le profondità in ragion dimidiata delle altezze del globo cadente, non ſi potrebbe col computo ritrovare la proporzion dell'intere foſſe? Ma il calcolo riuſcirà forſe difficile, ed intricato?

L. Non tanto, quanto v'immaginate. Il calcolo poi farà paleſe, che queſta ſteſſa ſperienza anzi che opporſi alla premeſſa propoſizione l'avvalora, e la fortifica: perciocchè le intere foſſe, poſte le ſaette B E picciole, ſi ritroveranno eſſere in ragion duplicata delle ſteſſe ſaette. A dimoſtrarlo ſi faccia $BO = r$, la circonferenza $BCDA = c$, le ſaette creſcenti $BE = x$, per conſeguenza $AE = \sqrt{2rx - xx}$. Ad aver la sfera, s'intenda rivolgerſi il circolo intorno all'aſſe B D; e ad avere la circonferenza del circolo, il cui raggio ſi è A E ſi faccia $r : c :: \sqrt{2rx - xx} : \frac{c}{r}\sqrt{2rx - xx}$: ma la metà della circonferenza nel raggio da l'area circolare $= \frac{c}{2r} \cdot \overline{2rx - xx}$, la quale, multiplicata per l'elemento dx, dà l'elemento del ſoli-

solido sferico $= \frac{c}{2r} . \overline{2rxdx - x^2 dx}$; il quale integrando, avremo lo sferico segmento $= \frac{c}{2r} . \overline{rx^2 - \frac{x^3}{3}}$; ma se x è assai picciolo, $\frac{x^3}{3}$ è incomparabile per rapporto a rx^2; dunque il solido sferico sarà come x^2, cioè in ragion duplicata delle saette, le quali essendo in ragion dimidiata dell' altezze, d' onde il mobile cade, ne segue, che i solidi sferici, o sian le fosse sieno come le altezze, dalle quali il globo discende.

N. Ritenute le vostre specie con questo sol di divario, che quelle pertinenti al globo da maggior altezza cadente le esporrò colle lettere majuscule, le altre coll' ordinarie. Di più le fosse le chiamerò F, f, le altezze, onde cade il globo, A, a. Voi, niuna quantità omessa, avete ritrovato essere $F : f :: \overline{r - \frac{X}{3}} . X^2 : \overline{r - \frac{x}{3}} . x^2$; ma $F : f :: A : a$ per lo nostro Teorema; dunque $A : a :: \overline{r - \frac{X}{3}} . X^2 : \overline{r - \frac{x}{3}} . x^2$, ovvero $\sqrt{A} : \sqrt{a} :: X\sqrt{r - \frac{X}{3}} : x\sqrt{r - \frac{x}{3}}$; ma $X : x > X\sqrt{r - \frac{X}{3}} : x\sqrt{r - \frac{x}{3}}$, perchè $r - \frac{X}{3} < r - \frac{x}{3}$; dunque si avrà $X : x > \sqrt{A} : \sqrt{a}$; dunque le saette avrebbero ad essere in maggior ragione, che la sudduplicata delle altezze, dalle quali il mobile cade; dunque la profondità della fossa del mobile da più alto cadente, deve essere alquanto maggiore di quello, che porta la ragion dimidiata dell' altezze; la qual conseguenza sembra contraria allo sperimento, nel quale il Martini la ritrova alquanto minore.

L. Quando si rimovessero tutti gli impedimenti, principalmente quelli della maggior frizione, e condensazion della sabbia, così seguirebbe di fatto; benchè forse la differenza riuscirebbe insensibile. Ma perchè il mobile, che fa più lunga caduta, e per conseguenza fossa, a proporzione vien più impedito, che non l' altro; così vien costretto non solamente a non formare una fossa più profonda, ma eziandio a formarla meno profonda di quel, che vorrebbe la ragion dimidiata dell' altezze. Ho nominati particolarmente i due impedimenti della frizione, e della maggior costipazion della sabbia, per-

I chè

chè questi entrano ancora in un altro sperimento dal Martini portato, a cui le medesime riflessioni onninamente si adattano.

Lascia cadere dalla stessa altezza due palle d' egual diametro, ma d' inegual massa, e ritrova, che le profondità delle fosse sono in ragion dimidiata delle masse, con questo, che la fossa del più grave è alcun poco minore.

N. Chiaro si è, che la stessa stessissima risposta anche a questo caso s' accomoda. Però avanziamo cammino, ed esaminiamo altre sperienze, perchè il giorno inclina alla sera.

L. Un' altra sperienza in questa materia merita considerazione, la quale è stata fatta dallo s' Gravesande, e rifatta dal Muschembroek. Formò egli un cilindro d' avorio dall' una, e dall' altra parte di due punte fornito, ma tali, che facessero angoli diversi. Egli vien rappresentato in questa figura. L' angolo A (*Fig.* 7) lo fece il Sig. s' Gravesande di 120 gradi, e l' angolo B di 54, e 20″. Per mezzo della macchina delle percussioni lasciò cadere così fatto corpo colla stessa velocità prima colla punta A, indi colla punta B dentro una massa d' argilla, e ritrovò, che le fosse formate erano perfettamente eguali; giacchè misurati i diametri delle cavità aveano la proporzion di 2 : 3, d' onde prendendo il computo ha raccolto l' egualità delle fosse.

N. Da questo sperimento unicamente raccogliesi, che corpi eguali dotati della stessa velocità, comunque sieno di figura diversa, formano fosse eguali.

L. Così è. Un altro sperimento pure leggesi nello s' Gravesande. AB, CD (*Fig.* 8) sono due cilindri, che hanno un sesquipollice di diametro, terminanti in due convessità emisferiche A, C. Le lunghezze loro sono disuguali per guisa, che i loro pesi la ragion serbano di 2 : 1. Potrete leggere con comodo le precauzioni ch' egli adopera, perchè le elasticità loro riescano eguali. Lascia cadere questi cilindri sopra un piano di marmo orizzontale al di sopra bagnato per guisa, che possa esser cospicua la macchia, che vi lascia il cilindro nella caduta.

Se il più grave cada dall' altezza di nove pollici, il più leggiero da quella di diciotto, riescono eguali le macchie lasciate sopra del marmo.

Se AB cadesse dall' altezza di tre piedi, cioè dupla di

di quella del caso antecedente, il diametro della macchia impressa sarebbe a quello del caso antecedente, come $6 : 5$.

Quanto al primo sperimento egli è lo stesso con quel del Signor Poleni.

Quanto al secondo sperimento con facile computo si ritroverà, che l'aja della macchia minore alla maggiore è in minor ragione, che la semplice delle velocità, o la dimidiata dell'altezze. Conciossiachè le altezze sono in ragione di $18 : 36$, ovvero di $1 : 2$; dunque le velocità sono, come $1 : \sqrt{2}$. I diametri delle macchie sono come $5 : 6$; dunque l'aje come $25 : 36$; ma $25 : 36 < 1 : \sqrt{2}$; dunque l'aja della macchia minore all'aja della maggiore è in alquanto minor ragione, che la velocità alla maggiore.

Il quale sperimento discorda alcun poco da un altro, che lo stesso Sig. s'Gravesande nel capo 29 del libro primo all'esperimento 6 rapporta, che se una palla d'avorio sovra un piano di marmo cade da diverse altezze, le aje delle macchie sovra il piano formate sono come le velocità, ovvero in ragion dimidiata dell'altezze. Ma a dirvela questi sono sperimenti, da cui si può conchiudere poco assai: perchè non le macchie sono gli effetti, ma sì bene le compressioni, che si formano nella palla, computando l'elasticità, la qual'è maggiore sotto maggior compressione. Ma essendo ignote in parte le leggi dell'elasticità, non si può fare il computo esatto: ma facendo il computo a un dipresso, vedrete sempre, che gli effetti s'accostano più alla proporzion de' quadrati delle velocità, che a quella delle velocità stesse. Conciossiachè se le aje sono in ragion dimidiata dell'altezze, dunque il quadrato AE (*Fig. 6*) come la radice dell'altezze, cioè ritenendo i simboli usati nell'esperimento del Martini, $2rx - xx$ come $\sqrt{a}$; ma $2r - x$ si può prender come costante: dunque x come $\sqrt{a}$, cioè la saetta della parte compressa in ragion suddupplicata dell'altezza, da cui cade la palla. Quì si rinnova il discorso fatto nell'esperienza del Sig. Martini.

Altro non rimane per compier la storia forse stucchevole degli sperimenti, se non di recar in mezzo quello, che vien

 descrit-

descritto nel trattato delle forze moventi dal Sig. de Camus. Egli è contenuto nel cap. 3 prop. 9. Leggete.

C. Io non farò altro, che tradurre le sue parole dal franzese in italiano. *Che si costruisca*, dice egli, *una capra, o una macchina tale, quali son quelle, di cui si fa uso per battere le palificate col montone*, che noi nel nostro linguaggio italiano chiamiam la berta; *che i montanti di questa capra sieno di sette piedi in circa, e che quel di mezzo, lunghesso il quale cade il montone, sia diviso dall' alto al basso in piedi, pollici, e semipollici; che vi s' applichi de' montoni di ferro, o di legno armato di ferro, i quali sieno di differente peso; che si collochi al di sotto di questa capra un peso di ferro di cinquanta libbre, nel quale sia fatto un picciolo buco per fissarvi una palla, e per collocarvene dell' altre sempre allo stesso luogo, affinchè il picciolo montone in cadendo le urti sempre nello stesso punto. Questa macchina così disposta, si collochi bene a piombo il montante, che porta il montone per lasciargli la libertà di scorrere, e di cader verso il centro della terra seguendo la legge, che gli è naturale.*

Se si alza il montone un pollice, e si lascia cadere sopra una palla di piombo da questa altezza due volte, questa palla resterà ammaccata tanto, quanto un' altra simile palla per la caduta del montone elevato a due pollici d' altezza; così il montone fa tanto effetto cadendo una sola volta da due pollici, quanto se egli cadesse due volte da un pollice d' altezza.

Che s' egli si lascia cadere due volte da un piede d' altezza, egli fa tanto effetto, e non punto più, che se si lasciaße cadere una volta da due piedi, le palle non rimanendo ammaccate più l' una, che l' altra.

Che se si lascia cadere due volte da cinque pollici d' altezza, egli farà tanto effetto, quanto se si lasciaße cadere una volta da dieci pollici.

Dieci volte da un pollice altrettanto, che da dieci pollici una volta. Se si lascia cadere cento volte da un semipollice d' altezza, egli farà tanto effetto, quanto se si lasciasse cadere una volta, poichè si è alzato a cinquanta pollici.

Ma se si lascia cadere una volta da sessantacinque pollici, egli sembra fare più effetto, che se si lascia cadere cento trenta volte da un semipollice, purchè il montante, che porta il montone

tone ſia bene a piombo da tutti i lati. Perciocchè per poco, ch' egli ſia diſordinato dalla linea a piombo o dall' una, o dall' altra parte, la caduta di cento trenta ſemipollici in cento trenta volte fa più effetto, che la caduta di ſeſſanta cinque in una volta.

Ma benchè il montante ſia a piombo due cadute da venticinque pollici ſembran fare più effetto, che una caduta da cinquanta; e la caduta di cinquanta pollici in cinquanta volte ne fa altrettanto, che la caduta di cinquanta in una volta.

Come le palle non ſono ſempre egualmente dure, poichè eſſe ſono colate nelle forme, il piombo eſſendo più, o meno caldo, la qual coſa può produrre qualche differenza a cagione delle parti più, o meno compreſſe, e tra le quali ſi ritrova qualche vuoto; così ripetendo più volte ciaſcuna di queſte ſperienze vi ſi trova qualche picciolo cangiamento; il qual cangiamento potrebbe altresì venire, che non ſi laſcia punto cadere eſattamente il montone a ciaſcun picciolo colpo, benchè ſiaſi poſto ſovra un pezzo di legno piatto, che ſi è lavorato con tutta l' attenzione poſſibile, e tagliato un poco men lungo d' un pollice, e d' un ſemipollice per far una compenſazione de' primi colpi cogli ultimi, che ſarebbero ſtati più forti d' una linea in circa, rimanendo la palla per tanto ammaccata verſo la fine de' colpi. Ma come non ſi è trovato altro, che una differenza quaſi impercettibile del più, o del meno nelle repetizioni, che ſonoſi fatte di cotali ſperienze; così ſi è giudicato eſſer tali, quali riportate ſi ſono, eſſendo eſſe ſtate fatte con un montone peſante una libra, e un quarto, con delle più groſſe, e delle più picciole palle. Sonoſi rifatte le ſperienze con un montone di legno armato di ferro peſante un poco più di tre oncie; le palle, che erano molto più picciole, che le precedenti, ſono comparſe più ammaccate per li piccioli colpi reiterati, che per lo ſolo maggiore in ciaſcuna repetizione. Se ne è attribuita la cagione alla frizione, che ſi patiſce nel diſcendere del montone. Queſte differenze non ſarebbero molto ſenſibili, quando grande attenzion non ſi uſaſſe.

Per non iſtancarvi con più lunga lettura, darò una ſcorſa a quanto ſoggiunge il Sig. de Camus. Egli dice d' aver fatta la ſteſſa ſperienza con un martello opportunamente diſpoſto tra due montanti, ed ottenuti i medeſimi effetti un poco più eſatti.

L. Que-

L. Questa è una assai bella sperienza, che mostra chiaramente, che, prescindendo dai tempi, gli effetti sono sempre mai proporzionali all'altezze, da cui il mobile vien cadendo, cioè a' quadrati delle velocità. Sicchè possiamo omai stabilire questo, come assioma sicuro, che non considerandosi i tempi, gli effetti sono in ragion delle masse, e de' quadrati delle velocità.

N. Ma io veggio in questo sperimento qualche irregolarità, che a dir vero m' intrica, cioè che due cadute da venticinque pollici facciano più effetto, che una caduta da cinquanta; e che poi cento trenta cadute da un semipollice facciano meno effetto, che una caduta da sessanta cinque pollici.

L. Quanto al primo lo spiegherei; perchè dalla frizione maggior resistenza a proporzione patisce un mobile da maggior altezza cadente; ma questa stessa ragione contraria al secondo caso; onde io confesso ingenuamente di non comprenderlo. Forse nell' esperimento qualche causa estranea, e non avvertita, sarassi intrusa. Ma tale, e tanta è l' abbondanza degli sperimenti portati dal Sig. de Camus, che non ostante questa picciola irregolarità sembrami non potersi metter in dubbio, che, rimosse le resistenze, si farebbe egual effetto per più cadute reiterate, che per una sola, la cui altezza eguagliasse la somma di tutte quelle.

N. Io leggo quì nel Riccioli altri modi di prendere la sperienza. Giacchè il quarto, ed ultimo modo l' abbiamo disaminato, camminiamo con moto retrogrado, ed esaminiamo il terzo. *La terza maniera*, dice egli, *si compie col lasciar cadere da diverse altezze in un vaso d' acqua un globo di legno, la cui gravità è la stessa colla gravità d' un egual volume d' acqua, e perciò possa immobilmente nuotar nell' acqua. Devesi notare a qual profondità discenda per l' impeto conceputo cadendo da un luogo più alto; e questo si osserverà più facilmente, se il vaso sarà di vetro. Ma, siccome ho detto nell' Almagesto nuovo lib. 9 pag. 394, la sperienza è infedele; perchè essendo l' acqua una volta divisa, si raggira in vortici, i quali non permettono alla palla di discender per retta strada, ma la rivolgono per una strada spirale, o serpeggiante; e perciò discende molto meno di quello, che dovrebbe.*

L. L' eccezione data dal suo autore a questo modo di sperimentare è sì vera, che non ne spererei gran profitto.

N. Io

N. Io veggio quì nella seconda maniera un metodo di sperimentare, che lascia cadere un corpo sopra una lance d'una bilancia, la cui altra lance è gravata d'un peso determinato.

L. Egli è lo sperimento del P. Mersenno, sopra di cui hanno fatto tanto di strepito i Signori Cartesiani, onde hanno cantato de' Leibniziani il trionfo; ma in vano, perchè la fallacia dello sperimento è stata riconosciuta dallo stesso Riccioli, che lo ha rifatto. Di grazia leggete.

N. *La seconda maniera consiste nell'elevazione d'un peso vie maggiore posto in una delle lanci, quanto è più alto il luogo, da cui si lascia cadere un medesimo globo nel centro, o sia nel mezzo dell'altra lance. Di cotale sperimento abbiam fatto uso altre volte, siccome abbiam riferito nel nuovo Almagesto lib. 9 pag. 393, e 394, e nell'astronomia riformata pag. 82; ma abbiam ritrovate proporzioni diverse, ed inconstanti massimamente nell'altezze maggiori. Rifacendo poi lo stesso sperimento alla presenza del Sig. Ab. Carlo Antonio Sampieri, del Sig. Dot. Geminiano Montanari, e del P. Giuseppe Ferroni abbiamo osservata la stessa inconstanza nata dal tremare, e dall'inflettersi dell'aste della bilancia, e dal ribalzo del globo cadente da grande altezza; laonde l'impeto impiegato nella riflessione niente giovava ad alzar il peso posto nell'altra lance, la qual cosa è molto notabile. Di più, quanto è maggiore l'altezza d'onde il globo cade, vie più difficilmente cade a piombo nel mezzo della lance. Ma ne al Mersenno nelle riflessioni phisico-matematiche, ne al Gasendo nella prima pistola al P. Cazreo venne fatto di ritrovare la proporzione, che la teoria prometteva. Imperciocchè per alzar un peso doppio, fu di mestieri lasciar cadere lo stesso globo di bronzo da una altezza quattro volte maggiore, e ad alzar un peso tre volte maggiore, fu necessaria un'altezza nove volte maggiore; per guisa, che le altezze sin ora state sono in ragion duplicata delle percosse, o sia de' pesi alzati oltre la vittoria dell'equilibrio. Ma così fatta proporzione si cominciò a turbare di poi; giacchè ad alzar un peso quattro volte maggiore non fu sufficiente un'altezza sedici volte maggiore, ma necessaria un'altezza diciotto volte maggiore; perchè, dice il Mersenno, la lance non potè seguitare la sì grande velocità della percossa, e perciò il globo ribalzò, e ribalzerà vie maggior-*

giormente, se discenderà da maggior altezza. Avessimo pur noi conosciuto tempo fa, che in cotal riflessione si consuma, o s' impiega una gran parte dell' impeto, il quale per altro sarebbe stato sufficiente ad alzar un peso maggiore, che non avremmo spesa in vano tanta fatica di ricercar con questo lubrico metodo la forza della percossa, o la sua esatta proporzione. Trattanto però da così fatte sperienze raccogliamo, l' impeto acquistato per la lunga caduta essere stato maggiore di quello, che raccolgasi dall elevazione del peso, perchè non tutto l' impeto acquistato s' è impiegato nell' alzar il peso, ma una parte altrove se n' è consumata.

L. A chi considera tutte le circostanze, che hanno resa sospetta così fatta sperienza al P. Riccioli, potrà mai dar l' animo di recarla in mezzo a favore de' Cartesiani? Egli è vero, che in prima i pesi alzati nell' altra parte della bilancia, si ritrovano in ragion dimidiata dell' altezze, da cui cade il globo, cioè in ragione delle velocità; ma spendendosi parte della forza viva nel ribalzo dopo la percossa, ed in altri effetti, chi potrà mai stabilire la vera proporzion delle forze vive, quando non si trovi prima il metodo di conoscere, qual parte nel ribalzo, e negli altri effetti se ne consumi?

N. La cosa mi par molto ardua, e difficile, e da non riuscirvi. Perciò basterà collocare così fatta sperienza tra le dubbiose, e niente provanti. Similmente lascieremo da parte il primo sperimento del Riccioli, il quale, per quel che veggio, al nostro intento non appartiene.

C. Concludiamo dunque questa giornata coll' accennare l' esperimento del Sig. Desagulieres, che trovo esposto nella lettera del Marchese Poleni. Avea egli disposti più fogli di carta egualmente distanti l' uno dall' altro, e lasciando cadere sopra d' essi una palla, che alcun numero ne rompesse, ritrovò, che prossimamente il numero de' fogli rotti corrispondeva al altezza, da cui la palla cadeva, cioè al quadrato della velocità.

N. Conchiudiamo pertanto essere per la sperienza confermata, e stabilita questa proporzione, che prescindendo dai tempi gli effetti delle forze vive sono sempre in ragion composita delle masse, e de' quadrati delle velocità. E chiunque il contrario sostener volesse, non dovrebbesi certamente ascoltare, siccome quegli, il quale opponendosi alla sperienza contraddice apertamente alla verità.

L. Fa

L. Fa d'uopo per ultimo di rimuovere un dubbio, che intorno agli sperimenti da noi fin ora considerati, vien mosso nel leggiadrissimo dialogo inserito ne' commentarj del secondo tomo della bolognese Accademia. Autore ne è l'incomparabile, e da me grandemente stimato Sig. Francesco Zanotti di quella pregevole Accademia meritevole Segretario; ed il dubbio è messo in bocca al Sig. Eustachio Zanotti nipote suo, ed ingegnosissimo astronomo. Mi studierò di proporlo il più brevemente, e chiaramente, che sia possibile.

Gli sperimentatori, dice l' interlocutore Sig. Eustachio, prendono due corpi disuguali di massa, ma di diametro eguali, i quali lasciano cadere da tali altezze, onde le fosse nel sevo, o nella creta molle formate, riescano eguali; e trovando per mezzo degli sperimenti, che così fatte altezze devono esser in ragion reciproca delle masse, raccolgono, che cadendo i mobili da cotali altezze producono effetti eguali, e per conseguenza d' eguali forze son provveduti. Fin a questo passo non trovasi, che ridire.

Quindi per ritrovare la proporzion delle forze, multiplicano la massa per diverse funzioni della velocità, finchè tra cotai prodotti ritrovano egualità, la qual ritrovata, questa dessa, dicono, è la proporzion delle forze de' globi cadenti: e perchè osservano, che le masse nelle velocità multiplicate non danno prodotti eguali, questi rigettano, e passando innanzi moltiplicano le masse per li quadrati delle velocità, e trovando eguali così fatti prodotti, asseriscono, che le forze vive sono, come le masse multiplicate ne' quadrati delle velocità. Quì il dubbio del dotto dialogista incomincia.

Tutto ciò, dice egli, asseriscono con verità, perchè nella presente legge di gravità i prodotti de' quadrati delle velocità nelle masse si ritrovano eguali. Che se altra, e diversa fosse la legge della gravità (giacchè molte altre leggi vi possono esser nella natura) nella quale non avessero ritrovati eguali i prodotti delle masse ne' quadrati delle velocità, non esprimerebbero certamente le forze per li quadrati, ma per altre diversissime podestà. Dunque nel presente sistema della gravità esprimono forse bene le forze vive, in altri no.

N. Perciocchè in oggi presa abbiam risoluzione di stabilire la proporzion tra le fosse, non tra le forze, io penso,

che tale sia il raziocinio, che da' Geometri negli sperimenti si fonda. Certa cosa è, che le fosse, le quali si formano da' corpi cadenti, devono esser in ragion delle masse, e di qualche funzione delle velocità, perchè crescendo le velocità, le fosse pur crescono: dunque nell' ipotesi, che le fosse riescano eguali, eguali avranno ad essere i prodotti delle masse, e di quelle funzioni delle velocità, a cui le fosse debbon proporzionarsi: ma nell' ipotesi della gravità costante evidentemente dimostrasi, che scavandosi fosse eguali, altri prodotti eguali esser non possono, se non se quelli, che formati vengono dai quadrati delle velocità: dunque le fosse sono proporzionali alle masse ne' quadrati delle velocità.

E questa conseguenza può legittimamente applicarsi a qualunque altra ipotesi di gravità o crescente, o decrescente. Imperciocchè con una determinata velocità non si può scavare se non una fossa determinata: dunque per qualunque forza o variabile, o costante quella velocità sia prodotta, la fossa riuscirà la stessa: dunque quando anche si cangiasse sistema di gravità, allora si formeran fosse eguali, quando le velocità acquistate saranno eguali a quelle, che si producono dalla gravità costante per altezze, che sieno in ragion reciproca delle masse: dunque in qualsivoglia sistema di gravità le fosse saranno in ragion composita delle masse, e de' quadrati delle velocità.

L. Voi la discorrete ottimamente, e il raziocinio vostro, è legittimo. Contuttociò, quando dall' interlocutore Sig. Eustachio si fa menzione d' altri sistemi di gravità, vorrei, che più distintamente si spiegasse, in che consister debba la diversità de' sistemi. Conciossiachè questo si può intender in due sensi interamente contrarj. O si vuole, che gli altri sistemi sieno diversi dal volgare per ciò, che in essi non abbian luogo quelle leggi della natura, che regolano tutti i movimenti, e che vengono contenute nelle note formule $fdt = mdu$, $fds = mudu$; o si vuole, che sieno diversi solamente per ciò, che nel presente sistema degli sperimenti la gravità è costante, negli altri è variabile secondo qualunque proporzione; comunque in tutti vagliano le accennate leggi della natura.

Se nel primo senso prendasi la diversità de' sistemi: io mi pro-

protesto, che non saprei quello, che accader dovesse in un sistema, in cui si cangiano le leggi fondamentali della natura: ed a me basta, che si sappia la proporzion delle fosse nel presente sistema, di cui gli sperimenti ci hanno scoperte le leggi, le quali sono per dir così sagrosante, ne mai si cangiano.

Ma che il dialogista non prenda in cotal senso la diversità de' sistemi, lo conghietturo, perchè al sospetto messo in bocca all' acutissimo Sig. Balbi, ch' egli cioè sosterrà il suo dubbio coll' opinione del Newton, che vuole la gravità variabile, egli niente risponde, ne contraddice: dunque egli dubita, che se la gravità fosse variabile, le fosse non si troverebbero, come le masse ne' quadrati delle velocità, comunque vagliano le stesse leggi fondamentali Ma il discorso del Sig. Nestore apertamente il convince. Conciossiachè se vagliono queste leggi, qualunque mobile con una data velocità forma una fossa di data grandezza ne più, ne meno: dunque per qualunque forza sieno le velocità prodotte, la fossa non può cangiarsi: dunque se nell' ipotesi della gravità costante le fosse sono, come le masse ne' quadrati delle velocità, lo saranno altresì in tutte le ipotesi di gravità variabile. Ben è vero, che a formar fosse eguali in cotali ipotesi, le altezze non saranno in ragion reciproca delle masse: ma saran tali, per cui si acquisteranno velocità, che saranno in ragion reciproca dimidiata delle masse.

Per le quali riflessioni sembrami rimosso ogni dubbio: onde quietamente, e senza paura d' esser caduti in paralogismo possiamo andare all' aria aperta per divertirci.

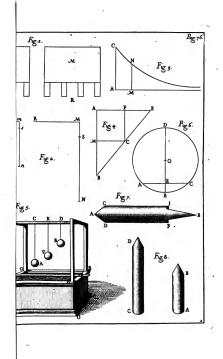
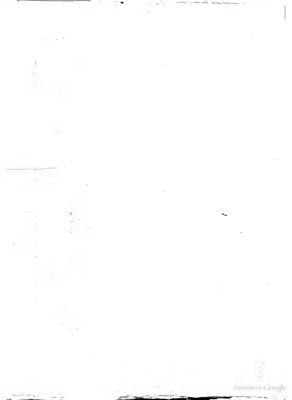
C. Se alle volte in questo giorno ho promossa qualche difficoltà, ciò non è stato, perchè sentissi diversamente da voi, ma sol perchè colla contraddizione s' illustrasse la verità maggiormente. Per altro le più forti risposte le trarrò dal tempo, da cui in questo giorno fatta abbiam precisione.

L. Ed io se di quando in quando ho nominato le fosse effetti della forza viva, l' ho fatto per maniera di discorso, non perchè abbia preteso di ciò affermare, avendo avuto in animo di prescindere interamente dalla controversia, e di stabilire ciò, che dall' una, e dall' altra parte è innegabile. Do-

K 2 mani

mani pure uferemo di fimile precifione, efaminando la teoria degli elaftri promoffa prima dal Signor Giovanni Bernoulli nella differtazione, che ha meritate le lodi dell' Accademia di Parigi, indi dal Signor Abate Camus in una differtazione, che fta regiftrata nelle memorie della fteffa Accademia.

GIOR-

Pag. 76.
Fig. 1.
M
R
Fig. 3.
C
N
A
M
Fig. 2.
m
s
n
R
M
S
N
Fig. 4.
A
F
E
M
C
B
Fig. 6.
D
O
A
E
C
B
Fig. 7.
C
I
A
B
D
F
Fig. 5.
C
K
D
B
V
A
O
R
G
Fig. 8.
D
C
B
A

GIORNATA TERZA.

INTERLOCUTORI

Lelio, Nestore, Cesare.

C. RIpensando meco medesimo alle cose tra noi privatamente discusse nella giornata passata, ho veduto, che le sperienze, le quali si producono nella controversia delle forze vive, sono quelle stesse, colle quali nel secolo passato per taluno si combatteva la dottrina del Galileo, ovvero delle forze continuamente applicate: benchè al presente siensi raffinate moltissimo, e ad una forma migliore incomparabilmente ridotte. Leggete nel Gasendo quel, che ne pensa il P. Cazreo, e vedrete, che questo dotto Padre contra del Galileo porta la sperienza d'un globo, che cadendo da varie altezze forma fosse all'altezze proporzionali, ed altre simili; ed a così fatte sperienze giudicava esser contraria la dottrina del Galileo.

L. Egli è verissimo, che comunque alla sentenza del Galileo la maggior parte de' filosofi acconsentisse, tosto che apparvero al pubblico i dialoghi della nuova scienza; pure più d'uno appoggiato a cotali sperienze la richiamava in dubbio; tra quali vuolsi altresì noverare il Cartesio, il quale in una lettera scritta al P. Mersenno, in cui dà il suo giudicio intorno all'opera del Galileo, espressamente dice, che una volta egli ancor pensava, che la gravità in tempi eguali, eguali gradi di velocità aggiungesse, ma che allora del contrario era certo. Pareva loro, che le predette sperienze esigessero, che la velocità non a' tempi, ma agli spazj riuscir dovesse proporzionale; lo che è falsissimo, avendovi io fatto vedere, che le sperienze medesime, o piuttosto l'esito loro dalle leggi del Galileo geometricamente deducesi. Fu sedata cotal contesa dal dottissimo Signor Fermat, il quale in una lettera scritta al Gasendo col metodo degli antichi fece vedere, che se le velocità fossero in ragione degli spazj scorsi, a scorrere qualunque spazio finito sarebbe stato mestieri d'un tempo infinito. Contuttociò sebben la dimostrazion li fermava; pure pareva ad alcuni un mistero, come quelle sperienze non si opponessero alla dottrina del Galileo.

N. Non

N. Non aveva il Galileo ancora le sue sperienze, con cui sostenere validamente, quanto avea scritto?

L. Le aveva, e molto più convincenti, che le obbiettate. E tra le altre quella, che in ogni parte del mondo colto è stata rinnovata, e ritrovata verissima; cioè, che se un mobile in un dato tempo qualunque scorre lo spazio = 1, negli altri tempi susseguenti eguali scorrerà gli spazj 3, 5, 7 ec. progredendo secondo la serie de' numeri dispari.

C. Non perchè io abbia in animo di contraddire alle cose insegnate dal Galileo, che credo verissime, ma perchè dissipiate ogni nebbia, che non mi lascia chiara vedere la verità, confesserò ingenuamente, che non ho mai inteso bene, siccome la dottrina del Galileo rimanga dalla predetta sperienza provata.

L. E perchè no? Io pronto sono, quando il vogliate, di dimostrarvi, che se gli spazj passati ne' tempi successivi, ed eguali sieno nella progressione de' numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9 ec., gli spazj interi sono sempre in ragion duplicata de' tempi; e da ciò dedurrò, che le velocità sono sempre in ragion de' tempi, ovvero in ragion dimidiata degli spazj; e queste poi sono le leggi del Galileo.

C. Di ciò non dubito punto, ed ammetto per belle, e buone le dimostrazioni: ma in questo non son fondati i miei dubbj. Ditemi, e di qual genere di forze tratta il Galileo?

L. Della gravità principalmente, ma i suoi teoremi possono egualmente adattarsi ad ogni forza, che sia costante.

C. Sicchè i teoremi del Galileo, e le leggi poco anzi da voi esposte riguardano una forza costante. E come mai le leggi delle forze costanti provar si possono con una sperienza, in cui le forze non sono altrimenti costanti.

L. E perchè non è costante la forza nella sperienza? Non è egli il corpo discendente nella sperienza animato dalla gravità, la quale si vuole, e si deve riguardare come costante? Conciossiachè quantunque il Sig. Newton generalmente pensi, che la gravità sia in ragion reciproca duplicata delle distanze dal centro, e ne' corpi, che sono dentro alla terra, la dimostri in ragion diretta delle stesse distanze: pure qualunque sia la proporzione, onde la gravità riguarda le distanze dal centro, in quegli spazj piccioli, in cui ci è permesso di prendere la sperienza, la differenza è sì picciola per la grande distanza dal cen-

centro, che fificamente vuolfi confiderare per minima, e però omettere, e trafcurare.

C. Non vi affannate, che tutto ciò perfettamente il comprendo. Ma per efpor i miei dubbj feguito ad interrogarvi. La fperienza fi fa nel vuoto, o nel pieno?

L. Si prende nello fpazio pieno d'aria: ma di ciò ricaverete, che non tutta la gravità è la forza follicitante, ma la differenza, che paffa tra la gravità del corpo, e la gravità d'un egual volume d'aria.

N. Ma da quì forfe il Sig. Cefare prenderà motivo di dubitare; perciocchè l'aria è un corpo fluido, il quale tanto è più condenfato, quanto più ci avviciniamo alla terra; dunque un volume d'aria eguale al volume del corpo peferà più, quanto più vicino alla terra noi lo prenderemo. Or col fuo moto accoftandofi fempre il corpo alla fuperficie terreftre, converrà levare alla fua gravità una parte fempre maggiore, e confeguentemente la forza follicitante riufcirà variabile.

C. Quefte fono minuzie, ch'io non confidero punto. In que' piccioli fpazj, in cui fi fa la fperienza, crefce così poco la condenfazione dell'aria, che non può effer a' fenfi fuggetta. Eccovi alla fine il mio dubbio:

Oltre le cofe fin ora confiderate v' ha un altro genere di refiftenza nell'aria, la quale non può ne ometterfi, ne confiderarfi come coftante. Effa dipende da quefto, che il corpo difcendente debba difcacciar di luogo in un dato tempo una certa porzion d'aria, e tanto maggiore, quanto è maggiore la fua velocità. Quindi tutti i filofofi convengono, che la refiftenza da cotal origine proveniente è maggiore, maggior effendo la velocità, quantunque non fiafi ancor determinato in qual proporzione: parendo, che non fi difcofti molto dal vero, almeno nelle velocità medie, che fia in ragion duplicata delle velocità. Ciò fuppofto, chi non vede, che difcendendo il mobile, va fempre aumentando la fua velocità: dunque ancora la refiftenza, la quale farà però variabile: dunque detratta quefta dalla forza coftante della gravità, o più veramente dalla differenza, che paffa tra la gravità del corpo, e la gravità d'un egual volume d'aria, rimarrà la forza follicitante, la quale farà variabile, non mai coftante. Quefta è la forza, che follecita i corpi, mentre fi prendono le fperienze. Come dunque

que l'esperienza presa nel caso, in cui la forza è variabile, può fissar le leggi della forza costante. Questa è stata la difficoltà, che mi ha sempre ritenuto dal giudicare, che per la sperienza venga la dottrina del Galileo confermata.

N. La dubitazione parmi ragionevolissima, ne al presente saprei rinvenir risposta, che mi appagasse. Che ve ne pare Signor Lelio?

L. L'obbiezione è piena d'ingegno: ma io crederei d'avere una risposta tale, la quale facesse vedere, che la sperienza è una dimostrazione della sentenza del Galileo. Ma noi ci portiamo troppo lontani dal suggetto, per cui ci siamo quì radunati.

C. Il desiderio d'imparare è quello, che quì ci trattiene: e noi non siamo obbligati ad un metodo sì rigoroso, che non possiamo incidentemente trattare ancora d'alcun altro punto, a cui il parlare ci porta; ne il tempo mancherà alla materia degli elastri. Perciò vi priego a dissipar la nebbia della mia mente, ed a rispondere alla difficoltà, che ho proposta.

L. Il vostro piacere è anche il mio. E per non andar in lungo colle parole vi avverto, che quando nominerò gravità del corpo, non intenderò la gravità, di che è assolutamente dotato, ma la differenza tra la gravità del corpo, e la gravità d'un egual volume d'aria, cioè la gravità, che ritiene il corpo nell'aria. Ciò presupposto

Io mi formo una serie di tempi decrescente, la quale sia a cagion d'esempio in ragion suddupla, cioè T, 2 T, 3 T ec. (*Fig.* 1, *e* 2) Suppongo, che il medesimo mobile nel primo tempo T scorra la A B, nel secondo B C, nel terzo C D ec. Similmente nel primo tempo 2 T scorra la 2A 2B, nel secondo 2 B 2 C, nel terzo 2 C 2 D ec.. Similmente nel tempo 3 T primo passi la 3 A 3 B, nel secondo 3 B 3 C, nel terzo 3 C 3 D ec., e ciò colla resistenza dell'aria; onde si verrà a formare un'altra serie di spazj A D, 2 A 2 D, 3 A 3 D ec.

Ognuno sa, che l'ultimo termine della serie T, 2 T, 3 T ec. verrà ad esser infinitamente picciolo: dunque ancor l'ultimo termine della serie A D, 2A 2D, 3 A 3 D ec. diverrà infinitamente picciolo. Quindi io rifletto, che ne' punti B, C, D del primo spazio la velocità sarà notabile, ne' punti analoghi 2 B, 2 C, 2 D del secondo spazio sarà minore, e minore ancora

cora

cora ne' punti analoghi del terzo; dunque ne' punti analoghi dell' ultimo termine sarà infinitamente picciola; ma alla velocità in qualche proporzione risponde la resistenza per modo, che, se quella è nulla, questa pure nulla esser deve; dunque la resistenza nel primo termine della serie sarà notabile, minor nel secondo, e ancor minore nel terzo; dunque nell' ultimo termine della serie sarà infinitamente picciola; sicchè in questo ultimo termine abbiamo l' ipotesi della resistenza infinitamente picciola; ma la gravità del corpo è finita, e costante; dunque in rispetto alla gravità la resistenza nell' ultimo termine è nulla; e però nello stesso ultimo termine della serie avremo l'ipotesi della forza costante.

C. Fin ora il discorso è giustissimo, ma non veggio dove termini, e riesca.

L. Ora lo vedrete. Venendo alla sperienza: io prima la fo in uno spazio grande, e notabile, e segno gli spazj A B, B C, C D in tempi eguali scorsi, e trovo che non servano la proporzione di numeri dispari 1, 3, 5 ec., ma che notabilmente B C, C D ec. sono minori di quello, che la proporzione domanda. La prendo in uno spazio alquanto minore, e gli spazj 2 A 2 B, 2 B 2 C, 2 C 2 D ec. deviano dalla nominata proporzione, ma alquanto meno, e tanto men sempre, quanto lo spazio, in cui prendesi l' esperienza, è minore, talmente che, se gli spazj vengono in un secondo di tempo passati, la differenza è sì picciola, che non è sensibile, come apparisce dagli sperimenti del Mersenno, del Riccioli, e dell' accuratissimo Signor Musschembroek. Dunque dappoichè, quanto più andiamo innanzi nella serie, gli spazj in eguali tempi passati più si accostano alla proporzione de' numeri impari 1, 3, 5 ec., nell' ultimo termine della serie i nominati spazj saranno esattamente nella proporzione de i numeri dispari; ma l' ultimo termine della serie si è quello, in cui si ha l' ipotesi della forza sollicitante costante, come si è dimostrato; dunque nell' ipotesi della forza costante gli spazj in egual tempo passati sono in proporzione de' numeri cassi 1, 3, 5, ec., come si dovea dimostrare. Io ho piuttosto la cosa accennata, che dichiarata; ma ho creduto, che in una materia lontana dal nostro proposito, parlando con persone intelligenti, lodevol fusse la brevità.

C. Avete esposto tutto ciò, ch' era necessario a dissipar le

L dubi-

dubitazioni, che mi toglievano il veder chiara la verità. Dopo ciò non provo pena veruna a dimoſtrar le leggi, che regolano la diſceſa d'un corpo animato da una forza coſtante; indi agevolmente ſi fa paſſaggio a ſtabilir con quai leggi abbianſi a muovere due corpi ineguali da ineguali, ma coſtanti forze ſollicitati; finalmente ſi deducono le leggi delle forze variabili; ſicchè baſta ſapere con qual proporzione ſi aumentino le forze, o ſi diminuiſcano, per applicarvi i principj, e il metodo con profitto.

N. Non dobbiamo oggi parlare degli elaſtri, i quali col chiuderſi ſpogliano i corpi d'ogni forza, e coll'aprirſi gliela comunicano? La vera legge, con che creſcono, o ſi diminuiſcono le forze elaſtiche, non credo, che ancor ſi ſappia: dunque ſarà di meſtieri camminare per via d'ipoteſi, e ſupporne una ad arbitrio per poter le proprietà di cotal movimento diſaminare.

L. Nulla meno. In due maniere ſi poſſono ricercar i movimenti provenienti dalla forza elaſtica o aſſolutamente, o comparativamente. Aſſolutamente non v'ha maniera di rinvenirli, quando non ſi ſappia la vera legge delle forze elaſtiche; ma non così comparativamente. Ritrovar comparativamente i moti provenienti da due ſerie d'elaſtri, che apronſi, non vuol dir altro, ſe non determinar la proporzion delle velocità, di cui in certi punti analoghi i mobili ſon dotati; e perciò non è neceſſario di ſaper altro, ſe non la proporzion, che paſſa tra le forze elaſtiche ne' medeſimi punti analoghi. E cotal metodo di comparazione è molto giovevole in parecchi caſi, ne' quali, per mancanza di cognizione della vera legge, non è poſſibile il ritrovare i movimenti aſſoluti. Di cotal metodo abbiamo dato un qualche eſempio nella giornata paſſata, ed oggi parlando degli elaſtri ne proporremo un sì bello, che non potremo altra coſa deſiderare.

C. Entro con piacere nella teoria degli elaſtri diſaminata dal Sig. Giovanni Bernoulli, e confermata dal Signor Camus, perchè eſſa è ingegnoſa, quanto altra mai, e quando anche non ſerviſſe alla deciſion della noſtra queſtione, fornirce di belle cognizioni, che meritano d'eſſer acquiſtate. Se in queſta giornata ancora farò qualche oppoſizione, ciò ſarà, non perchè abbia altra opinione, ma perchè ſi diradi ogni ſpezie di nebbia, e di caligine.

L. Nella

L. Nella paſſata giornata abbiamo conſiderati gli effetti, che vengono dalle forze vive prodotti, perchè per lo più abbiamo parlato di quel genere di forze, che chiamanſi reſiſtenze, le quali ſono atte non a produrre, ma ſolo ad eſtinguere il movimento; in queſta dovendo parlar di forze, le quali di eſtinguere non meno, che di produrre il movimento ſono valevoli, poſſiamo egualmente e conſiderar l'effetto, che la forza viva produce, e conſiderar la cauſa, da cui vien la forza viva prodotta. E perchè queſta ſeconda maniera è più ſpedita, e con miglior metodo ci conduce, a queſta ci appiglieremo, potendoſi però ogni coſa accomodare anche all'altra, come apparirà nel progreſſo.

Dando principio, io concepiſco col Bernoulli un elaſtro CDE (*Fig.* 3, *e* 4) formato di due lamine DC, DE, che ſi uniſcono in angolo. Queſto nel ſuo ſtato naturale *cde* ſia retto, ovvero di 90 gradi, e compreſſo, s' intenda eſſere di ſoli 30 gradi. Non v' ha dubbio, che le due gambe DC, DE, così compreſſo l'elaſtro, fanno forza di reſtituirſi nel naturale ſuo ſtato, e vi ſi reſtituirebbero di fatto aprendoſi dall' angolo di gradi 30 fino all' angolo di gradi 90, quando due forze poſte in C, E eguali non ſi opponeſſero alla reſtituzione; e baſterebbe, che l'una mancaſſe, o cedeſſe alquanto, perchè l'elaſtro da quella ſteſſa parte ſi apriſſe. Voi vedete, che il Bernoulli facendo aſtrazione dalla materia, dalla gravità, e dall' altre proprietà dell' elaſtro, non conſidera quì, che la ſua determinata figura, e la ſua perfetta elaſticità, in virtù della quale dilaterebbeſi con una infinita velocità, ſe alcun oſtacolo ſtraniero alla ſua dilatazione non ſi opponeſſe.

Immaginatevi ora due elaſtri eguali, ed egualmente compreſſi CDE, ILM (*Fig.* 3, *e* 5); il primo ſia ritenuto nella compreſſione di gradi 30 dalle due forze attive C, E; l'altro s' appoggi in I con una branca ad un piano immobile H, e l'altra ſia tenuta in dovere dalla potenza attiva F; io domando qual proporzione avrà la potenza F ad una delle due potenze C, E, le quali ſono eguali.

N. Sembrerebbe, che la potenza F doveſſe eſſer eguale a tutte due C, E preſe inſieme; perchè la medeſima forza richiedeſi a tener chiuſo l'elaſtro CDE, e l'elaſtro ILM; ma a tener chiuſo il primo ſon neceſſarie due forze C, E; dunque

 una

una forza eguale a queste due sarà necessaria a tener chiuso il secondo; ma altra forza non avvi, che la forza F; dunque questa eguaglierà le due C, E prese insieme. Il discorso par convincente, ma però io non son libero da sospetto.

C. Il sospetto non sembrami irragionevole. E chi vi dice, che per rapporto all' elastro ILM altra forza non abbiavi, che la F?

L. Eh Sig. Nestore bisogna confessarla, perchè la cosa è troppo patente, che la resistenza del piano fa quel medesimo sforzo, che farebbe un' altra potenza attiva, che in suo luogo si surrogasse; giacchè tanto il piano preme contro all' elastro, quanto contra del piano preme l' elastro; onde la pressione del piano eguagliando la potenza C, la potenza F dee esser unicamente eguale alla potenza E. E questo lo dobbiamo tra le cose certissime collocare. Ma proseguiamo, e concepiamo una serie d' elastri lunga, quanto a voi piace, (*Fig.* 5, *e* 6) NOP, PQR, RST, TVX. Il primo s' appoggi al piano immobile K, tutti sieno compressi all' angolo di gr. 30, come lo è l' elastro ILM, ed all' ultimo sia applicata la potenza G, che li mantenga nello stato di compressione, qual proporzione passerà tra le due potenze F, G?

N. Voi vorreste, ch' io dicessi quella, che passa tra il numero degli elastri; onde nel caso della figura, come 1 : 4.

L. E perchè no. Non vi sembra molto ragionevole, che una potenza, la qual sostiene la forza di quattro elastri riesca quadrupla d' un' altra, che d' un solo la forza sostiene?

N. Per quanto usiate del zimbello con artificio, pure per questa volta non mi fate cader nella rete Non mi sento punto volontà d' accordarvi, che la potenza G sostenga la forza di quattro elastri; anzi vi dico, che sostiene la pressione d' un solo, come la potenza F.

L. Sicchè per vostro avviso gli altri tre elastri o staranno oziosi, o non avranno potenza, che li sostenga.

N. Non siete pago d' avermi tratto nell' errore una volta. Vi dico, che gli altri tre elastri non istaranno oziosi, ma si sosterranno vicendevolmente l' un coll' altro Ed eccovi, se la volete, l' economia di questo equilibrio. Il primo elastro NOP si appoggia col punto N contro ad un piano immobile, e col punto P fa sforzo contro all' elastro vicino PQR, il quale fa

uno

uno sforzo contrario, e si equilibra coll' elastro primo, e così il secondo fa equilibrio col terzo, il terzo col quarto, il quale finalmente si equilibra colla potenza G, la quale però deve esser eguale alla potenza F, che tien chiuso un elastro solo.

L. In somma voi siete nato per la verità, e appresa, che l' avete una volta, la tenete sì bene, che ne vedete l' ultime conseguenze. Ma se io collocherò due, o più elastri non di seguito, ma uno presso all' altro, come in questa figura, (*Fig.* 7) che abbozzo, qual forza sarà necessaria per tenerli in dovere?

N. In questo caso la potenza G dovrà esser dupla di quella, che sostiene un elastro solo; perchè in questo caso un elastro non sostien l' altro, ne fanno tra loro equilibrio. E se ve ne fossero tre dovrebbe esser tripla; anzi se si formerà una serie d' elastri, quanti voi volete, raddoppiati, o triplicati ec., la potenza, che li sostiene, dovrà esser doppia, tripla ec.

L. Osservate, che così fatta proporzione tra le potenze sempre mantiensi, quando gli elastri sieno egualmente compressi, e per conseguenza quando nella loro dilatazione sieno aperti ad angoli eguali. Quindi, quantunque ci sia assolutamente ignota la forza elastica; pure qualora gli elastri, che si pongono in tutto, e per tutto eguali, sieno aperti ad angoli eguali, ci è sempre nota la proporzion delle forze, che li sostiene, e per conseguenza delle loro forze elastiche, comunque sien collocati o un dopo l' altro, od uno vicino all' altro.

N. Fin ora la cosa cammina così bene, che nulla più: ma non veggio a quale scopo dirigasi un tal proemio per riguardo alla nostra controversia.

L. Abbiate pazienza, che già m' inoltro a dichiararlo dietro alla scorta del gran Bernoulli. Concepiamo al presente due serie di elastri semplici, (*Fig.* 5, *e* 6) l' una per esempio di quattro, l' altra di uno. Le estremità I, N sieno appoggiate ai piani immobili H, K; e le altre estremità M, X sieno applicate alle palle eguali A, B, a cui sono applicate le potenze F, G, le quali impediscono la dilatazion degli elastri. Questi essendo eguali, ed egualmente compressi, solliciteranno le due sfere con isforzi eguali, e per conseguenza le forze morte applicate a queste palle saranno eguali.

Esa-

Esaminiamo pertanto ciò, che sì fatte forze messe in azione possono produrre di forza viva. Fingiamo, che le potenze F, G tutte ad un tratto si ritirino, egli è visibile, che le palle A, B, non opponendo che la forza d' inerzia, saranno obbligate a cedere, e che nel movimento accelerato, che loro imprimeranno gli elastri, la palla B acquisterà più di velocità per l' azione continua di quattro elastri, che non la palla A per l' azione d' un solo. Imperciocchè se il punto T fosse fisso, cosa manifesta si è, che l' ultimo elastro V comunicherebbe alla palla B quella stessa velocità, che alla palla A verrebbe dall' elastro L comunicata. Ma è patente, che il punto T non essendo fisso, l'elastro V non può aprirsi cacciando la palla B, se non si aprono similmente gli altri tre O, Q, S, e di luogo non muovono il punto T; d' onde seguita, ch' essi causano nella palla B una accelerazione maggiore di quella, che nella palla A da un solo elastro verrà prodotta. Dalle quali cose evidentemente deducesi, che il globo B avrà acquistata più di celerità, che il globo A, o sia che gli elastri, che compongono le due serie, siensi interamente aperti, o sia che, ritenuti per qualche intoppo, siensi aperti soltanto in parte, ma d' una maniera uniforme, per esempio dall' angolo di gr. 30 all' angolo di gr. 60.

Ciò stabilito, che è evidentissimo, non si può richiamar in dubbio, che di due corpi eguali quello non abbia forza maggiore, che è dotato di maggiore celerità; dunque la palla B sarà dotata di maggior forza, che la palla A. Dal che devesi, per avviso del Bernoulli, inferire, che le forze morte sono di diversissimo genere, che le vive; perchè quelle essendo eguali, queste risultano disuguali.

Egli non basta d' aver mostrato, che la forza viva della sfera B è maggiore della forza viva della palla A; bisogna ancora per riguardo al nostro intento stabilire, in qual proporzione, prescindendo dal tempo, sia maggiore la cagione, che la produce. Ma ogni picciola attenzion fa vedere, che la causa, la qual trasfonde la forza viva nel corpo B è quattro volte maggiore di quella, che la trasfonde nel corpo A. Imperocchè le potenze resistenti G, F essendo rimosse, gli elastri si rivolgono ad agire contro alle palle B, A, e cedendo queste, ciascun elastro si apre, e fa uso di tutta la sua ener-

energia, ficchè niuna parte ne va a male, o perifce; ma cotai elaftri, effendo eguali, ed egualmente chiufi, fon dotati d'una eguale energia; dunque le caufe producenti le forze vive devono effere neceffariamente, come i numeri degli elaftri, cioè come 4 : 1; dunque le caufe producenti le forze vive nelle palle B, A fono come 4: 1.

Quefta confeguenza, che le caufe, le quali trasfondono le forze vive nelle sfere B, A, fieno come il numero degli elaftri, vale ancorchè le palle fieno ineguali.

Anzi aggiungo di più, che ponendo una ferie di elaftri femplici, ed un'altra di raddoppiati, o triplicati, tuttochè le forze morte foffero come 1 : 2, ovvero come 1 : 3, pure le caufe producenti le forze vive, prefcindendo fempre dal tempo, farebbero come il numero degli elaftri, e fenza ch' io di vantaggio mi ftanchi, la cofa apparifce chiariffima da ciò, che ho detto fin ora.

Molte efpreffioni ho ufate per accomodarmi alla maniera di parlare del Bernoulli; per altro in quefta giornata non altro pretendo, fe non fe di far vedere che, pofte l'antecedenti fuppofizioni, il numero degli elaftri è, come il prodotto della maffa multiplicata nel quadrato della velocità. Proporrò la cofa in alcuni teoremi, e foggiungerò alcune cofe pertinenti a' tempi, perchè poffano effer d'ufo in progreffo, efponendo i cafi particolari in alcuni corollarj, che metteranno il tutto in buona veduta.

TEOREMA PRIMO.

SE fi abbiano due ordini d'elaftri femplici, da' quali ricevano il movimento due sfere, io dico, che i numeri degli elaftri faranno, come i quadrati delle velocità nelle maffe.

Io fuppongo, che le rette DB, CA (*Fig.* 8, *e* 9) rappresentino due ferie d'elaftri eguali, ed egualmente chiufi, di modo che il numero loro ftia in ragione di DB, CA, e quefte s'intendano immobilmente appoggiate ne' punti D, C. Io fuppongo di più, che due palle di qualunque grandezza B, A, partendo da' punti B, A, ricevano il movimento dagli elaftri, le cui forze morte, ficcome abbiam detto, faranno eguali. Le due curve BSH, APG fieno tali, onde colle loro ordinate

MQ,

MQ, LP rappreſentino le velocità acquiſtate dalle due palle ne' punti M, L. Io prendo le abſciſſe BM, AL, e gli elementi loro MO, LN in ragione di DB : CA, e condotte le correſpondenti ordinate, meno le QV, PT parallele alle abſciſſe per aver VS, TR eſprimenti le velocità acquiſtate per gli elementi MO, I.N.

Chiamo $DB = n$, $CA = N$, $BM = nx$, e per conſeguenza $AL = Nx$, e gli elementi loro $MO = ndx$, $LN = Ndx$; la palla $B = m$, la palla $A = M$; la potenza ſollicitante $= p$, la quale è la ſteſſa per rapporto ad amendue i corpi, ritrovandoſi gli elaſtri egualmente aperti; la velocità $MQ = u$, $LP = V$. Per le leggi già conoſciute nella teoria del Galileo ſi avrà $npdx = mudu$, $Npdx = MVdV$: dunque integrando $nSpdx = \frac{mu^2}{2}$, $NSpdx = \frac{MV^2}{2}$: dunque $nSpdx : NSpdx$; ovvero $n : N :: mu^2 : MV^2$: dunque il numero degli elaſtri, come la maſſa nel quadrato della velocità; la qual conſeguenza ha luogo, anche, quando gli elaſtri ſieno interamente aperti; perciocchè gli ſpazj paſſati ſaranno anche in tal ipoteſi come il numero degli elaſtri.

Si chiami il tempo per $MO = dt$, il tempo per $LN = dT$, e noto che ſarà $dt : dT :: \frac{ndx}{u} : \frac{Ndx}{V} :: \frac{n}{u} : \frac{N}{V}$; ma dall' antecedente formula ſi ricava $u : V :: \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}}$; dunque $dt : dT :: \sqrt{mn} : \sqrt{MN}$; la qual ragione eſſendo coſtante ne ſeguita, che anche i tempi interi $t : T$ ſaranno, come $\sqrt{mn} : \sqrt{MN}$.

Corollario primo. Se le maſſe M, m ſieno eguali, le velocità ſaranno in ragion dimidiata del numero degli elaſtri, nella qual ragione ſi trovano eſſere ancora i tempi.

Corollario ſecondo. Se le maſſe ſieno in ragion reciproca del numero degli elaſtri, i tempi ſi ritrovano eguali, e le velocità ſono in ragion diretta del numero degli elaſtri, ovvero in ragion reciproca delle maſſe.

Corollario terzo. Se il numero degli elaſtri ſia lo ſteſſo, le velocità ſi troveranno eſſere in ragion reciproca dimidiata delle maſſe, ed i tempi in ragion diretta dimidiata delle maſſe.

C. Queſto corollario è oppoſto interamente a ciò, che ne com-

commentarj del secondo tomo della bolognese Accademia l'ingegnosissimo Sig. Francesco Maria Zanotti ha messo in bocca al Sig. Eraclito Manfredi; cioè che se la stessa serie d'elastri s'impiega a dar movimento a diversi corpi, loro comunica velocità, che sono in ragion reciproca delle masse; e ciò pensa egli esser conforme alla dottrina del Sig. Giovanni Bernoulli.

L. Se cotal pensiero possa accordarsi colla dottrina di quel grand' uomo, potete vederlo per voi medesimi; giacchè fin ora non ho altro spiegato, se non i principj, e il metodo bernoulliano, dal quale discendono conseguenze interamente contrarie, cioè che le velocità de' corpi ineguali prodotte dalla stessa serie sono in ragion reciproca dimidiata delle masse.

N. So, che non meno il Sig Zanotti, che il Sig. Manfredi si è studiato di sostenere questo loro detto, stampando nella terza parte del medesimo tomo ciascuno una disertazione, colla quale combattono la teoria comparata degli elastri stabilita dal Bernoulli.

L. Amendue discorrono con un ingegno ammirabile; ma, a dirvi candidamente, gli sforzi loro li reputo più ingegnosi, che veri. Lascio di considerare, che, sebbene per essi fosse stata scoperta la verità, pure non avrebbero potuto dire in prima, che per sentenza del Bernoulli due corpi ineguali ricevono dalla stessa serie velocità, che sono in ragion reciproca delle masse. Perciocchè essi impugnano interamente, e combattono la sentenza, e cangiano i principj del Bernoulli; onde avrebbero dovuto dire, esser falsi i principj bernoulliani, e le conseguenze indi dedotte. Ma lasciando star questo. Esaminiamo quali principj adoprino, e quanto sien fermi. Per ora direm qualche cosa de' principj usati dal Sig. Zanotti, riservandoci ad esaminar in appresso quelli del Sig. Eraclito.

Il Sig. Zanotti si fonda interamente in questo principio, che un elastro, ed una serie d'elastri appoggiati per l'una parte ad un sostegno immobile, se impieganſi a dar movimento ad un medesimo corpo, s'aprono in tempo eguale. Ma voi vedete, che questo è un punto controverso, e che il Sig. Bernoulli colle leggi ricevute delle forze continuamente applicate fa vedere, che i tempi, in cui si aprono, sono in ragion dimidiata del numero degli elastri.

N. Che tale sia il principio del Signor Zanotti, io lo

M con-

confeſſo ; ma egli non lo aſſeriſce ſolamente ; lo prova :

L. E da qual fonte, e con quai principj il dotto autore lo prova?

N. Co' principj del movimento traslato. Ed eccovi la ſua dimoſtrazione. Se l'elaſtro A ſia collocato dentro ad una barchetta, niun negherà, che non ſi apra nel medeſimo tempo, o eſſa riposi, o ſia portata dalla corrente. Ma ſe all'elaſtro A preceda l'elaſtro B, queſto farà il medeſimo, che fa la barchetta in movimento ; perciocchè ſiccome la barca non fa altro, che traſportare l'elaſtro A, mentre ſi apre ; così ancora l'elaſtro B non fa altro in aprendoſi, che traſportare l'elaſtro A ; dunque ſiccome queſto nella barca ferma, o viaggiante apreſi in egual tempo ; così, o/ eſſo venga dall'elaſtro B traſportato, o no, in tempo eguale dovrà aprirſi ; e per conſeguenza due ſerie d'elaſtri applicate alla ſteſſa maſſa in egual tempo ſi aprono.

L. Spedita, e facile dimoſtrazione in una coſa, che è ſtata ſempre mai difficile riputata. Ma io dubito, che l'eſempio ſia molto diverſo, e che la teoria del moto traslato non abbia che fare cogli elaſtri, che s'aprono. Conciossiachè prima che l'elaſtro A poſto nella barca ſi apra, già tutti i ſuoi punti ſono dotati della medeſima velocità ; onde l'elaſticità non fa altro, che accreſcere a ciaſcuno la velocità in quella maniera, onde la produrrebbe, ſe la barca fuſſe immobile. Ma l'elaſtro B, il qual precede l'elaſtro A, non dà a tutti i punti dell'elaſtro nel medeſimo iſtante la ſteſſa velocità ; ma prima comunica qualche picciolo movimento alla punta, ch'egli tocca, dalla quale i punti vicini l'un dopo l'altro ſucceſſivamente vengono accelerati. Perciò nel tempo, in cui per ſe medeſima la punta applicata al corpo ſi va aprendo, l'altra punta, aprendoſi l'elaſtro vicino, ſi chiude. Laonde l'elaſtro A poſto dopo l'elaſtro B nello ſteſſo tempo ſi ritrova alquanto meno aperto, che non ſi ritroverebbe, ſe foſſe ſolo : e perciò un elaſtro ſi aprirà più preſto, che due. E quì ſuppongo, che nell'un caſo, e nell'altro la ſteſſa maſſa muover ſi debba. A farli però aprire in tempo eguale ſarebbe di meſtieri, che la maſſa, a cui applicati ſono due elaſtri, fuſſe minore di quella, che da un elaſtro ſolo vien moſſa. Voi vedete pertanto, qual teoria ſi poſſa fondare ſovra un principio, che sì patentemente vacilla.

Ma

Ma non interrompiamo la vera teoria dedotta dalle leggi delle forze continuamente applicate.

Prima di paſſar oltre ſtimo bene di far alcune rifleſſioni intorno all'equilibrio. Sieno due ſerie di elaſtri eguali, ed egualmente chiuſi, rappreſentate dalle rette D B, C A, e queſte ſieno applicate a due maſſe eguali B, A. Si prendano B M, A L infiniteſime, ma proporzionali alle D B, C A; è noto dalla propoſizione, che tanto i tempi per B M, A L, quanto le velocità acquiſtate ne' punti M, L ſaranno in ragion dimidiata di D B, C A, ovvero di B M, A L. Si rappreſentino i detti tempi, e velocità dalle M Q, L P amendue infiniteſime, e coi vertici B, A ſi deſcrivano due parabole, che paſſino per li punti Q, P, le quali, eſſendo M Q : L P :: $\sqrt{BM}$: $\sqrt{AL}$, ſaranno perfettamente eguali. Sia D I $=$ C K l'apertura d'un elaſtro, e ſi faccia D B : D I :: B M : Bf; di più C A : C K :: A L : Ae; è coſa facile a dimoſtrare, che $Bf = Ae$; dunque anche l'ordinata $fb = eg$. Ma eſſendo per gli ſpazj infiniteſimi B M, A L la forza elaſtica coſtante, fb, eg rappreſentano i tempi per Bf, Ae, e le velocità ne' punti f, e; dunque queſti tempi, e queſte velocità ſono eguali, e però le forze ſon talmente coſtituite, onde nello ſteſſo corpo in eguali tempicelli, eguali velocità ſi producono, e lo promuovono per eguali ſpazj. E queſta è la ragione, perchè meſſo un corpo in mezzo agli elaſtri D B, C A deve in perfetto equilibrio dimorare. Per la qual coſa chiaramente ſi vede, che nella natura dell'equilibrio fa di meſtieri il tempo conſiderare; perchè ſe in uno ſteſſo corpo nello ſteſſo tempo egual forza per due direzioni oppoſite trasfonder ſi debba, niuna ſe ne trasfonderà di fatto.

C. A qual uſo può mai ſervire così fatta rifleſſione, che all'equilibrio appartiene?

L. Lo vedrete nelle giornate ſeguenti. Intanto non interrompiam la teoria degli elaſtri.

TEOREMA SECONDO.

SIa una ſerie d'elaſtri rappreſentata dalla linea A B, (*Fig.* 11) a cui dall'una, e dall'altra parte ſieno applicate due ſfere A, B: dico, che il numero degli elaſtri, i quali eſercitano la energia contro le ſfere A, B, è come la maſſa nel quadrato della velocità.

Si divida la retta AB nel punto C in ragion reciproca delle maſſe, e s' intenda fermato con un chiodo il punto C per modo, che le due ſerie degli elaſtri AC, BC ſi appoggino contro ad un ſoſtegno immobile in C. Si prendano qualunque linee AL, BM in ragione di AC, BC. Per lo corollario ſecondo dell' antecedente teorema le rette AL, BM ſaranno ſcorſe in tempi eguali, eſſendo per la coſtruzione le maſſe A, B in ragion reciproca del numero degli elaſtri AC, BC; ma arrivate le palle in L, M ciaſcun degli elaſtri ſaraſſi egualmente aperto; dunque in egual tempo ciaſcun degli elaſtri apreſi egualmente; dunque in qualſivoglia tempo ritrovandoſi ſempre egualmente aperti gli elaſtri, il chiodo C ſi troverà dall' una e dall' altra parte premuto egualmente, e tra due potenze eguali coſtituito, e però in perfetto equilibrio; dunque anche levato il chiodo C i due elaſtri, che a quel punto s' appoggiano, faranno equilibrio, ed il punto C reſterà immobile; dunque il numero degli elaſtri, che eſercitano l' energia contra di A, è rappreſentato da CA, e il numero degli elaſtri, che agiſce contra di B, è rappreſentato da CB; ma per l'antecedente teorema ſi ha $CA : CB :: AV^2 : Bu^2$; per V intendo la velocità acquiſtata da A, e per u la velocità acquiſtata da B: dunque ec.

Corollario. Se cerchiſi la ragione delle velocità, eſſa per lo ſecondo corollario ſi troverà in ragion reciproca delle maſſe, ovvero diretta del numero degli elaſtri CA, CB.

Queſte due propoſizioni vagliono ancora, quando gli elaſtri foſſero raddoppiati, ma in ogni ſerie egualmente.

TEOREMA TERZO.

Sieno due qualunque ſerie d' elaſtri a volontà raddoppiati, io dico, che i due mobili riceveranno tali velocità, onde il numero intero degli elaſtri ſarà ſempre, come la maſſa nel quadrato delle velocità.

Ritenute tutte le denominazioni della propoſizion prima, e la preparazione, ſicchè DB, CA, (*Fig* 8 10.) che chiamo n, N, rappreſentino gli elaſtri l' uno dopo dell' altro ſituati, e a queſte ſieno proporzionali BM, AL, e gli elementi MO, LN; ma il numero degli elaſtri raddoppiati nel primo caſo ſia $= r$,

$= r$, nel ſecondo $= R$; onde i numeri interi degli elaſtri ſieno $: : rn : RN$. Le potenze ſollicitanti in B, A, ovvero in M, L ſaranno come i numeri degli elaſtri raddoppiati, cioè come $r : R$. Perciò chiamata nel primo caſo la potenza $= rp$, ſarà nel ſecondo $= Rp$.

Secondo le formule della teoria galileana ſarà $rp.ndx = mudu$, $Rp.Ndx = MVdV$, e ſommando $rn.Spdx = \frac{mu^2}{2}$, $RN.Spdx = \frac{MV^2}{2}$; dunque $rn : RN : : mu^2 : MV^2$, cioè il numero intero degli elaſtri, come la maſſa nel quadrato della velocità; come ſi dovea dimoſtrare.

Chiamati gli elementi del tempo, come nel teorema primo, ſarà $dt : dT : : \frac{ndx}{u} : \frac{Ndx}{V} : : \frac{n}{u} : \frac{N}{V}$; ma $u : V : : \frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}}$; dunque $dt : dT : : \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$; la qual proporzione eſſendo coſtante, ſaranno ancora i tempi interi nella ſteſſa ragione, cioè $t : T : : \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$.

Corollario primo. Se ſi faccia $r = R$; cioè ſe nelle due ſerie gli elaſtri ſieno egualmente raddoppiati, ne ſeguiranno le medeſime conſeguenze, che ſonoſi nel teorema primo conſiderate.

Corollario ſecondo. Se l'intero numero degli elaſtri ſia eguale, onde ſi abbia $rn = RN$, ſaranno i quadrati delle velocità in ragion reciproca delle maſſe; onde ſe queſte foſſero eguali, eguali ſarebbero le velocità. Ma quanto a' tempi ſi ritrova eſſere $t : T : : n\sqrt{m} : N\sqrt{M}$, cioè in ragion compoſita ſemplice del numero degli elaſtri collocati l'uno dopo dell'altro, e dimidiata delle maſſe; la qual ragione ſi vorrebbe omettere, quando le maſſe foſſero eguali.

Corollario terzo. Se $n : N : : r : R$, cioè il numero degli elaſtri raddoppiati, come il numero di quelli, che ſon poſti l'uno dopo dell'altro, ſaranno le velocità in ragion diretta del numero degli elaſtri raddoppiati, e reciproca dimidiata delle maſſe, la qual, poſte eguali le maſſe, ſi dee omettere. Ma i tempi ſerberanno la ragion dimidiata delle maſſe, e però, poſte eguali le maſſe, ſaranno eguali.

Altri

Altri corollari dedur si potrebbero, ma questi sono a bastanza, e gli altri dalle formule discendono con somma facilità.

Abbiamo fin ora considerate le forze vive siccome generate dall'espansion degli elastri, e ci siamo studiati d'investigare la proporzione, che passa tra le velocità prodotte, e il numero degli elastri, ritrovando sempre così fatto numero, come la massa nel quadrato della velocità: ma collo stesso metodo considerar si possono le forze vive agenti contra degli elastri; ed in tal caso rimane similmente provato, che il numero degli elastri chiusi è sempre, come la massa nel quadrato della velocità; essendo cosa notissima, che una palla, che abbia da dieci elastri ricevuto il movimento, rivolgendosi contro agli stessi, o contro ad eguali elastri ne chiuderà similmente dieci prima, che abbia il movimento perduto.

C. Voi avete colla solita vostra chiarezza spiegata, e promossa la teoria degli elastri del Sig. Giovanni Bernoulli; ma bisognerà, che la difendiate dall'accuse del Sig. Martini, se brama avete di darci licenza di casa vostra con soddisfazione.

L. Recatele in mezzo, che l'attenzione, la quale userò in confutarle, dimostrerà la stima, che a questo Autore professo.

C. Egli confessa, che le forze acquistate da' corpi per l'espansion degli elastri, sono come il numero degli elastri; ma ciò proviene, non perchè le forze morte sieno di natura diverse dalle forze vive, ma perchè i tempi, in cui vengono impresse, serbano la stessa ragione del numero degli elastri. Presupposto questo principio, e contraendo il suo favellare al caso, in cui due serie ineguali d'elastri non raddoppiati comunichino il movimento allo stesso corpo, così corregge i falli del gran Bernoulli. Noi riterremo i simboli usati di sopra. Secondo la sua ipotesi de' tempi proporzionali al numero degli elastri, gli elementi de' tempi s'esprimono per $n\,dx$, $N\,dx$; ma gli incrementi delle velocità du, dV sono, come la potenza p ne' detti tempi; dunque si avrà $du : dV :: p\,n\,dx : p\,N\,dx$, e integrando $u : V :: n\int p\,dx : N\int p\,dx :: n : N$, cioè la velocità, come il numero degli elastri; ma il numero degli elastri, come le forze vive; dunque le forze vive, come le velocità secondo, che vuole il Cartesio.

L. La conseguenza si deduce bene posta l'ipotesi; ma

che

che dirette, se vi farò chiaramente vedere, che l'ipotesi de' tempicelli proporzionali al numero degli elastri, ovvero agli spazietti MO, LN (*Fig.* 8, *e* 9) non sussiste? Egli è chiaro, che le velocità ne' punti M, L sono in ragion diretta degli spazietti MO, LN, e reciproca de' tempi, in cui si scorrono, cioè per l'ipotesi degli stessi elementi; dunque le velocità ne' punti M, L sono eguali: la qual conseguenza egualmente certa, è contraria a quella, che ha dedotta il Sig. Martini, che le velocità sieno, come i numeri degli elastri; dunque l'ipotesi per se medesima si distrugge.

N. E' fuor di dubbio, che se gli spazj BM, AL, ed ogni loro parte proporzionale è passata in tempi proporzionali, bisogna, che in qualunque punto, che divide le BM, AL similmente, le velocità si trovino eguali, altrimenti non sarebbe vero, che i tempi sono proporzionali agli spazj. Ma d'onde mai deriva, che il Martini adoperando le formule del Galileo ritrova le velocità non eguali, ma proporzionali al numero degli elastri?

L. Sapete d'onde? perchè suppone eguali le forze sollicitanti, mentre l'ipotesi de' tempi proporzionali agli spazj non può sussistere, se le forze sollicitanti non sono in ragion reciproca de' medesimi spazj. La ragion'è, perchè, essendo $u : V :: \frac{ds}{dt} : \frac{dS}{dT}$, e per l'ipotesi $\frac{ds}{dt} = \frac{dS}{dT}$; dunque $u = V$, e $du = dV$; ma per la legge del Galileo $p\,dt : P\,dT :: du : dV$; dunque $p\,dt = P\,dT$; ma $dt : dT :: ds : dS :: s : S$; dunque $ps = PS$, ovvero $p : P :: \frac{1}{s} : \frac{1}{S}$; dunque le due ipotesi, che le forze sollicitanti sieno eguali, e che i tempi sieno, come gli spazj, vicendevolmente distruggonsi; onde non è maraviglia, che geometricamente discorrendo ne nascano conseguenze diverse, ed incompatibili. Anzi se vi piace, farò ancor nascere la sentenza del Leibnizio. Non è per lo Martini $du : dV :: p\,dt : p\,dT$? ma $dt : dT :: \frac{n\,dx}{u} : \frac{N\,dx}{V}$; dunque $du : dV :: \frac{np\,dx}{u} : \frac{Np\,dx}{V}$; dunque $u\,du : V\,dV :: np\,dx : Np\,dx$, e integrando $\frac{u^2}{2} : \frac{V^2}{2} :: nSp\,dx : NSp\,dx :: n : N$. Osservate però, siccome da due cose incompatibili, e incombinabili ne nasca-

nascano tutte le conseguenze e vere, e false, e ragionevoli, e assurde. Tra le assurde dunque si metta l' ipotesi del Martini de' tempi proporzionali agli spazj nelle due serie d' elastri, i quali aprendosi comunicano allo stesso corpo, ovvero a' corpi eguali il movimento.

N. Quanto bisogna andar lenti a stabilire ipotesi; mentre così facilmente, e con tanta chiarezza si gettano a terra. Ma non si getterà mai a terra la vera sentenza dedotta dalle leggi della natura, cioè a dire, che i tempi sieno in ragion dimidiata del numero degli elastri, o sia degli spazj presi in questa medesima proporzione, la qual verità voi avete dimostrata nel corollario primo del primo teorema.

C. Seguitiamo il Martini, il qual corregge il Bernoulli. Questi avea asserito, che se le due serie d' elastri DB, CA fossero infinite, divenendo la potenza p costante, le due curve BQH, APG diverrebbero due parabole. Il Sig. Martini raccoglie dalle sue formule, che dovrebbero essere linee rette: perchè essendo $npdx = du$, $Npdx = dV$, sarà integrando $npx = u$, $Npx = V$, le quali formule sono a due linee rette.

L. Saranno due linee rette, che alla linea degli spazj s' inclineranno ad angoli eguali, dovendo essere $u : V :: nx : Nx$; saranno due linee rette, che faranno due angoli disuguali cogli spazj, dovendo essere le velocità eguali, posti gli spazj proporzionali: saranno due parabole, se in luogo dell' elemento del tempo si sostituisca l' elemento dello spazio diviso per la velocità, che gli è proporzionale. Giacchè da due ipotesi, che distruggonsi, nasce qualunque conseguenza vi torna meglio.

C. Quanto al resto siami permesso di recitare le sue stesse parole tradotte con fedeltà in lingua italiana, che ho portate meco in questa carta scritte, perchè, confessando io di non intenderne il fondo, potrebbe accadere, che dalla mente dell' autore mi dilungassi. *Avvertir si dee*, dice egli, *che le rette* BM, AL *disegnano bensì le dilatazioni dell' una, e dell' altra serie degli elastri, ma non già gli spazj scorsi dai corpi* B, A, *i quali devono esser alquanto maggiori*.

N. Oh questa mi riesce nuova! se le ultime punte degli elastri stanno sempre unite ai due corpi, onde essi per l' azion dell' elasticità ne ricevono novella velocità: come mai può essere,

fere, che i due corpi percorrano fpazj maggiori di quelli, per cui fi è dilatata l'una, e l'altra ferie degli elaftri?

C. Abbiate la pazienza d'udire il refto. *Per certo que' corpi vengono promoffi verfo* F, E, *non folo per gli impulfi fucceffivi degli elaftri (a' quali foli, fe ponghiam mente, ne rifulterebbero gli fpazj* BM, AL *eguali a un puntino alle dilatazioni degli elaftri), ma ancora per la forza acquiftata, la quale non perdon mai.*

N. A bell'agio, perchè io mi fento ftretto da mille dubitazioni, onde non poffo più contenermi dall' interrompervi. Dunque, fecondo il Sig. Martini, gli fpazj fcorfi da' mobili, devono effer maggiori degli fpazj BM, AL; altrimenti in virtù della forza acquiftata non percorrerebbero fpazj di forte alcuna, ficcome l'autor pretende; ma le dilatazioni degli elaftri fono precifamente BM, AL; dunque i mobili fi ritrovano dagli elaftri difgiunti; dunque non è poffibile, che contra di loro gli elaftri agifcano, e diano accrefcimento di velocità; lo che alla fperienza è chiaramente contrario.

L. Convien difgombrare infiniti equivoci, che in quefte poche righe contengonfi, e confervar l'idee chiare, e diftinte. In ogni moto, che provenga da una forza continuamente applicata, fi vuole, a rettamente difcorrere, confiderare e la velocità acquiftata per l'azione paffata, e la velocità, che fi acquifta novellamente per l'azione prefente. Se la forza morta ceffaffe d'agire, il mobile profeguirebbe il fuo viaggio colla velocità acquiftata, ma agendo quella, quefto un nuovo incremento acquifta di velocità. Lo fpazio fcorfo dal mobile fin dal principio del movimento in virtù della vecchia, e della nuova velocità fi domanda fpazio fcorfo con moto accelerato. Ciò fuppofto, com' è noto a tutti, io veggio chiariffimo, che gli fpazj paffati nel noftro cafo dal mobile con moto accelerato, non altri fono, fe non gli fpazj BM, AL; e quefte pure fono le dilatazioni degli elaftri, cioè gli fpazj paffati dall'ultime punte de' medefimi elaftri: giacchè ancor quefte punte paffano cotai fpazj in virtù delle velocità già acquiftate, e del novello accrefcimento. Laonde le cofe così bene camminano, e van del pari che nulla più. Giacchè quella velocità, che ha acquiftata il mobile, l'ha acquiftata ancor la punta dell'elaftro, onde non agendo l'elafticità, camminerebbero del pari con moto

N equa-

equabile; e quell' incremento, che dall' elasticità riceve la punta dell' elastro, deve trasmettersi al corpo, onde il suo movimento si accelera. Dunque siccome gli spazj passati dalle punte degli elastri sono BM, AL, così sono ancora gli spazj passati dal mobile.

C. Ma egli potrà obbiettare, che la sperienza c' insegna, che subito, che l' elastro cessa d'agire, il corpo l' abbandona, e da lui si separa.

L. E se così obbiettasse, direbbe male, perchè la sperienza c' insegna solo, che quando l' elasticità agisse in parte contraria, ritraendo la punta dell' elastro, e ritardandola, il corpo, che tal ritardamento non sente, da lei si disgiunge. Ma se fosse possibile il caso, in cui l' elasticità ne per l' una parte, ne per l' altra agisse, la punta dell' elastro, ed il corpo, toccandosi, camminerebbero equabilmente; la qual cosa per un momento avviene, quando l' elastro è ridotto allo stato suo naturale, onde la forza elastica è nulla, non essendo soverchiamente chiuso, ne dilatato l' elastro.

C. *Questo*, soggiunge il Martini, *si può rischiarar coll' esempio d' un corpo discendente, dove lo spazio passato parte si deve al successivo impulso di gravità, parte alla violenza acquistatasi nel discendere.*

N. La cosa va bene, ma nell' un caso, e nell' altro interamente del pari.

C. *Pertanto, acciocchè dalla teoria degli elastri dedur si possa la teoria della gravità, è bensì necessario, che le serie degli elastri abbiano maggior ragione di qualunque data per rapporto alle loro dilatazioni, siccome avvisa il Bernoulli; ma ancora è necessario, che le dilatazioni si considerino non come gli interi spazj descritti dai corpi con moto continuamente accelerato, ma piuttosto come la somma degli spazietti, che traggon l' origine dai soli successivi impulsi degli elastri.*

N. Questo non è altro, che il ripeter il già detto, onde le cose dal Sig. Lelio toccate, sono bastevoli a dimostrarne la falsità.

C. Altro non rimane se non di discutere ciò, che per maggior chiarezza aggiunge nelle note. *Conciossiachè*, dice egli, *in quella teoria*, cioè della gravità, *lo spazio scorso dal corpo grave nella discesa trae origine parte dall' impeto acquistato nel discen-*

discendere, parte dall' impulso successivo, e continuato della gravità, le quali due cose sono in guisa disposte, che tutte e due concorrono ad agire nel corpo discendente, senza che l'una danneggi l'altra. Ma la cosa molto diversamente cammina in un corpo spinto dagli elastri, che a poco a poco vannosi rilassando. Perciocchè se vuoi tener conto dell' impulso acquistato dal corpo per la dilatazion degli elastri, è mestieri, che tu confessi, ch' egli dee discostarsi dal contatto dell' ultimo elastro, e per conseguenza gli elastri non potranno esercitar azione contra d' un corpo, che più non toccano. Che se pretendi, che l' ultimo corpo non s' allontani dal contatto dell' ultimo elastro, ed egli così viaggi, siccome gli elastri si spiegano, per certo tu non metti a conto l' impeto già acquistato. Per la qual cosa nella teoria degli elastri il continuo, e successivo loro impulso, e l' impeto, o sia la forza impressa al corpo, non possono così accordarsi, siccome s' accordano la forza di gravità, e l' impeto, che per la successiva azione di lei ha acquistato il corpo nella discesa. Questa diversità sembrami così chiara, e manifesta, che non può essere sfuggita al Bernoulli. Laonde m' induco a credere, che non per amore di verità, ma per impegno di fazione abbia abbracciata cotal sentenza. Eccovi finita l' opposizion del Martini.

L. Non ho fatta picciola forza a me stesso nell' ascoltarvi senza punto interrompere. Per dir però qualche cosa sopra l'ultime parole, non si fa una manifesta ingiuria alla sincerità geometrica del Bernoulli il pur sospettare, che per amor di fazione abbia ad occhi veggenti abbandonata la verità? Quando anche avesse egli sbagliato, ne veduta avesse una verità più chiara della luce del mezzo giorno, io direi, che ha dato a diveder d' esser uomo, lo che non reca vergogna ne pur agli ingegni più sublimi, non mai d' esser uomo mancante di sincerità, che è gravissima macchia ad ogni onesta persona.

Benchè la differenza notata dal Martini non sembrami sì patente, come egli la spaccia. Io dico pertanto, che il corpo deve sempre mai star attaccato all' elastro, ne perciò lascio di metter a computo l' impeto già acquistato. Perciocchè bisogna, che il Sig. Martini s' imprima ben nella mente, che l' ultima punta dell' elastro è dotata di quella stessa velocità, di cui è dotato il corpo; e quando nuova azione non sopraggiungesse, camminerebbe l' una e l' altro con equabile velocità, e l' ela-

N 2 stro

ſtro ſi ſpiegherebbe bensì, ma non in virtù della ſua forza elaſtica, ma dell' impeto già acquiſtato; onde quando anche ſi preſcinda da nuova azione, ſtarà la punta dell'elaſtro congiunta al corpo. Ma come non è poſſibile, che ſtia ozioſa la virtù elaſtica d'un elaſtro compreſſo, così eſercita di continuo novella azione, ed accelera non men il corpo, che la punta ultima dell'elaſtro, e così di mano in mano ſi va accreſcendo la velocità dell'uno, e dell'altra, ſin a tanto che l'elaſtro ſia ridotto al naturale ſuo ſtato. Or dopo ciò comparate inſieme un ſaſſo cadente, ed un corpo accelerato dall'energia di più elaſtri, e ravviſate, ſe vi dà l'animo, la differenza così patente, che paſſa tra l'uno, e l'altro.

N. Nel ribattere le oppoſizioni del Sig. Martini, ritenendo i ſimboli ſin ora uſati, vi ſiete ſervito della formula $npds = mudu$, della quale ha pur fatto uſo il Bernoulli. Ma il Sig. Eraclito Manfredi, uomo dottiſſimo, non conviene con voi nella verità di tal formula, ma in ſuo luogo ſoſtituiſce, e adopra queſt' altra $n^2pds = mudu$.

L. Prima d'eſaminare il fondamento della ſua formula, maneggiamola un poco, e veggiamo generalmente quai conſeguenze ne naſcano. Eſſendo pertanto $n^2pds = mudu$, $N^2pds = MVdV$; ſarà $n^2Spds = \frac{mu^2}{2}$, $N^2Spds = \frac{MV^2}{2}$; dunque $n^2Spds : N^2Spds :: \frac{mu^2}{2} : \frac{MV^2}{2}$; ovvero $n^2 : N^2 :: mu^2 : MV^2$. Quindi io raccolgo, che poſta la ſteſſa ſerie d'elaſtri, cioè $n = N$, ſi avrà $mu^2 = MV^2$; dunque $u : V :: \sqrt{M} : \sqrt{m}$; cioè le velocità ſaranno in ragion reciproca dimidiata delle maſſe. Per la qual coſa, il metodo uſato dal Sig. Manfredi, prova la falſità di quella propoſizione, per cui difendere, egli ha ſcritto la ſua diſertazione. Eraſi avanzato, ch'una ſteſſa ſerie d'elaſtri comunica a maſſe ineguali velocità, che ſerbano la ragion reciproca delle maſſe, e col metodo del Manfredi, ſi ritrovano in ragion reciproca dimidiata. Ma laſciando ſtar queſto, ditemi qual grave ragione induce il Sig. Manfredi a cangiar le formule delle forze continuamente applicate, ricevute concordemente da tutti quanti i geometri.

N. Di-

N. Dirollo in breve. Il Sig. Manfredi, premettendo il principio, che le pressioni non sono eguali, come si suppongono nelle formule bernoulliane, ma sono, come le lunghezze delle serie, pensa, che debbano esprimersi per np, Np. Moltiplicate poi cotali pressioni per gli spazietti nds, Nds, verranno a dar le formule $n^2 pds = mudu$, $N^2 pds = MVdV$.

L. Affin di fissare quale de' due metodi preferir si debba se il bernoulliano, o il manfrediano, sarà d'uopo di ritornar indietro, e di trattar delle forze continuamente applicate, e delle formule, che s'usano per istabilir le proprietà dei movimenti. Ditemi, chi è stato il primo scopritore di questa parte della meccanica, e quai leggi sono state in prima fissate.

N. Il Galileo, siccome è noto a tutti, è stato il primo, che entrato sia in così fatta ricerca, parlando della gravità, e considerandola come costante, cioè come tale, che non si cangia punto in quantità, ed in valore nel progresso del movimento. In questa ricerca ha fissate due leggi, le quali sono state il fondamento, e la base di tutte le ricerche seguenti. Le leggi sono, che la forza costante di gravità, moltiplicata nel tempo, è eguale alla quantità del movimento prodotta, e che la stessa forza, moltiplicata per lo spazio è eguale alla metà della massa moltiplicata nel quadrato della sua velocità; le quali due leggi possiamo esprimere con queste due formule $ft = mu$, $2fs = mu^2$.

L. Ditemi, qual quantità viene indicata per la specie f, e qual cosa s'intende col nome di forza, che si suppone costante.

N. Domandate cose, che sono notissime a chi che sia. Per la specie f, e col nome di forza, in questo caso, non altro s'intende, che la forza morta di gravità.

L. Se io a questa vostra risposta obbiettassi in cotal maniera. Le premesse formule non sembrano giuste, e vere, perchè non intendendosi per la specie f, se non la forza morta di gravità, non si mette a computo la sua azione, o, per usar l'espression del Manfredi, il numero delle sue pressioni, e de' suoi impulsi, a cui si dee por mente per fissar le vere leggi del movimento. Laonde se la specie n indichi il numero delle pres-

preſſioni, le vere formule ſaranno $nft = mu$, $2nfs = mu^2$. A cotal obbiezione, come riſpondereſte?

N. La riſpoſta è troppo patente. Riſponderò, che cotal numero di preſſioni, o a parlare più propriamente, che l'azione vien meſſa in computo a ſufficienza, qualor ſi multiplica la forza morta per lo ſpazio, ovvero pel tempo; onde moltiplicando la f per la n, ed indi amendue moltiplicandole per s, ovvero per t, non ſi fa altro ſe non computare due volte il numero delle preſſioni, cioè uno di quegli elementi, da cui vuolſi miſurare l'azione.

L. Lodo la cautela, colla quale preſcindete per ora, ſe l'azione debba miſurarſi dallo ſpazio, ovvero dal tempo. Ciò ſuppoſto: paſſiamo a conſiderare un corpo dotato della velocità $= c$, il quale appreſſo venga accelerato dalla gravità coſtante $= f$; quali ſaranno le leggi di cotal movimento?

N. Dalle coſe dette facilmente deduceſi, che varranno le formule ſeguenti $ft = m \,.\, \overline{u - c}$, $2fs = m \,.\, \overline{u^2 - c^2}$; cioè la forza nel tempo eguale alla maſſa nella differenza delle due velocità; e la doppia forza nello ſpazio eguale alla maſſa nella differenza de' quadrati delle due velocità. La dimoſtrazione è ſempliciſſima. Concioſſiachè ſe concepiamo, che la velocità $= c$ ſia generata dalla ſteſſa forza $= f$ nel tempo $= \theta$, e per lo ſpazio $= \sigma$, e che la velocità $= u$ ſia generata nel tempo $= T$ per lo ſpazio $= S$, ſi avranno le formule

$$fT = mu \quad , \quad 2fS = mu^2$$
$$f\theta = mc \qquad 2f\sigma = mc^2$$

; dunque ſottraendo l'una dall' altra, ſi troverà $f \,.\, \overline{T - \theta} = m \,.\, \overline{u - c}$, $2f \,.\, \overline{S - \sigma} = m \,.\, \overline{u^2 - c^2}$; ma $T - \theta = t$, $S - \sigma = s$; dunque $ft = m \,.\, \overline{u - c}$, $2fs = m \,.\, \overline{u^2 - c^2}$. Come ſi dovea dimoſtrare. Se la gravità applicata foſſe, non ad accreſcere, ma a diminuir la velocità, collo ſteſſo metodo ſi dimoſtrerebbe valer le formule $ft = m \,.\, \overline{c - u}$, $2fs = m \,.\, \overline{c^2 - u^2}$.

L. Ed in queſte formule, la ſpecie f, non altro indica, ſe non la forza morta di gravità, computandoſi abbaſtanza il nume-

numero de' ſuoi impulſi, ovver la ſua azione, qualor ſi moltiplica per lo ſpazio, ovvero pel tempo. Avanzate ora cammino, e moſtratemi, quali formule vagliano nell' ipoteſi, che la gravità non ſia coſtante, ma variabile.

N. Baſta prendere uno ſpazio, ed un tempo infiniteſimo, che diremo ds, dt. In queſto ſi può conſiderare come coſtante la gravità, quantunque per ſe ſteſſa variabile, eſſendo il ſuo incremento, o decremento incomparabile per rapporto al ſuo valore finito. E perchè incomincio a veder il fine di queſte ricerche, ch' ora mi fate, oſſervo, che nell' infiniteſimo dt, o ds non ſi prende per coſtante altro, che la forza di gravità, non il numero degli impulſi, ovvero l' azione, la quale ſi mette a computo, moltiplicando la forza morta per ds, dt. In queſto caſo, chiamata la velocità $= u$, il ſuo incremento $= du$, avremo le formule $fdt = m.\overline{u + du - u}$, $2fds = m \cdot \overline{u + du}^2 - u^2$, ovvero $fdt = mdu$, $2fds = m.\overline{2udu + du^2} = 2mudu$, eſſendo du^2 incomparabile con udu. E queſte ſono le formule, che vagliono in tutte le ipoteſi di gravità coſtante, o variabile, nelle quali la f ſignifica la pura forza morta, mettendoſi a computo la ſua azione colla multiplicazione per ds, dt. Se il moto ſi ritardaſſe, le formule ſarebbero $fdt = -mdu$, $fds = -mudu$.

L. Dalle voſtre rifleſſioni m' avveggio, che avete penetrati i miei diſegni. Fin ora ci ſiamo fermati col Galileo nella ſola gravità. Ma gli altri geometri, che ſon venuti appreſſo lui non hanno ampliata la ſua dottrina, adattandola all' altre forze?

N. Così è. Dalla gravità coſtante, e variabile han fatto paſſaggio i geometri alle forze elaſtiche, centrifughe, di tenacità ec., avviſando, che eſſendo tutte del medeſimo genere colla gravità, doveano dalle medeſime leggi eſſere regolate. Quindi han giudicato valere le ſteſſe formule per riguardo a tutte quante le forze continuamente applicate. La ſperienza ha favorito l' avviſo loro, perchè le conſeguenze dedotte ſono ſtate conformi agli ſperimenti, ogni qual volta ſi ſono potuti fare. Perlochè omai ſono d' accordo tutti i geometri, che le predette formule vagliano per tutte quante le forze continuamente applicate, e però formule delle forze continuamente applicate chia-

chiamar si sogliono. Si avverta, che siccome, parlandosi della gravità, la specie f, non altro indica, che la forza morta, computandosi la sua azione, quando si moltiplica per dt, o per ds; così addiviene ancora nell'altre forze, per rispetto alle quali la specie f deve indicare la pura forza morta, la quale moltiplicata per dt, o per ds, darà la sua azione.

L. Siam finalmente giunti dove io voleva. Il dottissimo Signor Eraclito Manfredi non nega, che vagliano le predette formule, allorchè si tratta dell'elasticità; solamente accusa il Bernoulli, perchè mentre considera due serie d'elastri posti l'un dopo l'altro, a cui sieno applicate due masse eguali, allorchè ciascun degli elastri si trova egualmente aperto, prenda le elasticità, o come egli le chiama, le pressioni in tutto, e per tutto eguali, dovendosi anzi considerare come proporzionali alle lunghezze delle serie; onde, chiamata la lunghezza della serie $= n$, le vere formule sieno $nfdt = mdu$, $nfds = mudu$.

Due cose si vogliono distinguere, siccome pare, che le distingua il Sig. Manfredi, l'elasticità, o la pressione, ed il numero delle pressioni, o, siccome io amo di parlare, l'elasticità, e l'azione dell'elasticità. Quanto alla quantità dell'elasticità, o sia della pressione, conviene anche il Manfredi, che sia eguale nell'un caso, e nell'altro: e questo è pur quello, che assume il Bernoulli; perocchè nelle formule $fdt = mdu$, $fds = mudu$, la specie f non altro significa, siccome abbiam fatto vedere, che la forza morta dell'elasticità, onde facendo eguale f e nell'uno, e nell'altro caso, si suppongono unicamente eguali le forze morte.

Che se poi giudicasse il Sig. Manfredi, che il Bernoulli supponesse eguale il numero delle pressioni, o sia l'azion dell'elasticità; mi permetta di dirgli, che non credo esser mai venuto in mente a quell'uomo celebre, e grande un cotal pensiero. Egli mette a computo il diverso numero delle pressioni, o sia l'inegualità dell'azioni, quando moltiplica l'elasticità $= f$ per ds, o dt, siccome s'è spiegato di sopra. Ed il Sig. Manfredi, che oltre al multiplicar la f per ds, o dt, la multiplica ancor per n, non fa altro, che metter a computo il numero delle pressioni due volte; perchè multiplicando f per ds, ovvero dt, si ha il numero delle pressioni; dunque colla multiplicazione per n non ottien altro, che computarlo la

secon-

feconda volta. Tutte queste cose fanno ad evidenza vedere, che le vere formule sono le adoperate dal Bernoulli, non dal Manfredi.

C. Per le riflessioni fatte, cade a terra tutto ciò, che dalla supposta egualità delle pressioni disputa il Manfredi contro al Bernoulli; perchè questo dotto autore suppone bensì eguale la quantità della pressione, ma non il numero, cioè colle vostre parole suppone egual la pressione, ma non l'azione; e l'azione è la causa della mutazion dello stato, non la pressione.

L. Mi sia lecito per ultimo d'avvertire, che il metodo del Bernoulli non è di fissare le velocità, e i tempi col principio delle forze vive; perchè con quelle velocità, e con que' tempi provando la sua sentenza delle forze vive, caderebbe in una troppo meschina, e patente petizion di principio, da cui quell' uomo grande è stato sempre lontano. Ma da altri principj inconcussi, come avete veduto, cioè dalle leggi delle forze continuamente applicate dimostra essere le velocità come $\frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}}$, ed i tempi come $\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}}$; e ciò dimostrato, sforzasi di provare la sua sentenza intorno alle forze vive. Perciò a torto dicesi da' Signori Manfredi, e Zanotti, che egli fissa que' tempi, e quelle velocità per sostenere la sua sentenza delle forze vive. Egli tali li stabilisce, perchè così esiggono le leggi delle forze continuamente applicate. Io non mi fo mallevadore, che per la proporzione delle velocità, e de' tempi da lui trovata, si provi la sua sentenza intorno alle forze vive. Solo sostengo, e l'ho dimostrato, che le leggi delle forze continuamente applicate, provano ad evidenza essere le velocità come $\frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}}$, ed i tempi come $\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}}$; e questo si dee tener per fermo, non dipendendo ne poco, ne molto dalla questione delle forze vive; rimanendo ancor da discutere, se da tali principj si provi esser la forza viva, come la massa nel quadrato delle velocità.

N. Rimosse l'obbiezioni del Martini, e del Manfredi, siami permesso di recar in mezzo ciò, che contra d'una particolare dimostrazione dedotta dalla teoria degli elastri opponesi, in un libretto stampato non ha molto in Verona, dal Signor

Marzagaglia. L'argomento è il seguente. Ponganfi due ferie d'elaftri eguali in lunghezza, ma per guifa raddoppiati, che una, come D B (*Fig.* 8, *e* 10), fia d'elaftri femplici, l'altra C A, fia d'elaftri quadruplicati. Dimoftra preffochè col metodo efpofto l'Autore, qualunque fiafi, che due corpi eguali B, A riceveranno dall'efpanfion degli elaftri velocità, le quali faranno, come 1 : 2; onde il numero degli elaftri faranno, come i quadrati delle velocità generate.

L. L'autore di cotal raziocinio è il celebre Sig. Daniello Bernoulli, figliuolo del Sig. Giovanni, e lo e pone nella difertazione, che ha per titolo *Efame dei principj della meccanica*, ftampata nel primo tomo degli atti di Pietroburgo. Ma a così fatto evidentiffimo raziocinio qual cofa oppone il Signor Marzagaglia? perchè quantunque quel libretto letto abbia, pure non ho più a mente le fue oppofizioni.

N. Accomodando l'oppofizioni alla figura, che abbiamo fotto degli occhi: egli oppone in prima, che malamente fi affume, come variabile la retta BM; perchè il punto B è fiffo, ed il punto M determinato, effendo quel punto, in cui fi applica la data potenza *p*.

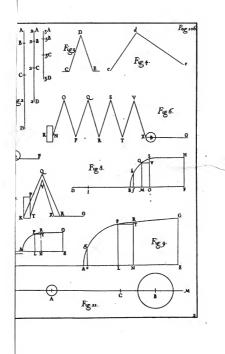
C. La potenza *p* non è data, ma variabile; perchè di mano in mano, che gli elaftri fi aprono, fi fa minore, ed è variabile l'abfciffa BM; perchè coll'aprirfi degli elaftri fi fa maggiore. Altra cofa è, che ne'punti analoghi M, L le due potenze fieno in data ragione, altra che fieno date. Il primo è vero, il fecondo è falfo, come è patentiffimo a chi che fia.

L. Paffate all'altra oppofizione, che quefta è fcioita.

N. La feconda oppofizione fi è, che falfamente fi fuppone dal dotto autore, che l'elaftro agifca nel corpo per tutto lo fpazio BM; perchè chiufi gli elaftri, e pofto il corpo in B, l'elafticità comunica al corpo tanta velocità, quanta fe ne ricerca, perchè amendue colla medefima velocità fi muovano: e quefto fatto, il globo fugge con tanta velocità, con quanta l'elaftro lo fegue.

C. E che? penfa forfe il dotto oppofitore, che gli elaftri diano al corpo in un tratto tutta la velocità? Glie la comunicano a poco a poco, ne ceffano mai di dargliene, finchè gli elaftri alla fua naturale apertura non fon condotti.

N. Oppone per ultimo al Bernoulli, che egli fuppone, che

Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 11.

che amendue le ſerie s'aprano egualmente in tempi eguali.

L. Non ſi è mai ſognato Daniel Bernoulli un tale ſpropoſito. Il Bernoulli dirà, che il tempo, in cui ſi apre la ſerie degli elaſtri ſemplici al tempo, in cui ſi apre la ſerie degli elaſtri quadruplicati, ſarà come 2 : 1, ſiccome dalle noſtre formule ſi raccoglie; ne perciò punto di forza perderà il ſuo argomento. Concludiamo per tanto eſſer coſa certa, che il numero degli elaſtri è ſempre proporzionale alla maſſa nel quadrato della velocità o generata, o diſtrutta. La controverſia è poſta, non nel richiamar in dubbio le coſe certe, ma in eſaminare ſe da queſte o l'una, o l'altra ſentenza delle forze vive legittimamente derivi.

GIORNATA QUARTA.

INTERLOCUTORI

Lelio, Neſtore, Ceſare.

C. VOi vi penſate, che anche nella preſente giornata dobbiam eſſer uniti d'opinione, ſiccome ſtati lo ſiamo nelle paſſate; ma v' ingannate, perchè avrete a ſudar molto per raccoglier la conſeguenza, che pretendete, dalle coſe, che v' abbiamo ſin or concedute.

N. Io confeſſo d' eſſer dubbioſo, ed ho per opporvi letto tutto ciò, che ho potuto, maſſimamente nel Pemberton, e nel Deſaguliercs, ne voglio arrendermi, ſe non ribattete con evidenza le ragioni, che vi opporrò.

L. Sicchè veggio, che non debbo in oggi contendere con due amici, che portino con ſeco una filoſofica docilità per arrenderſi; ma con due feroci avverſarj oſtinati di non darſi vinti, ſe non li ſtringo del tutto, e non li diſarmo. Con tutto ciò non penſiate, ch' io voglia parlar di mio ſenſo, nò. Solo produrrò ciò, che contro a' Carteſiani, dalle coſe ne' dì paſſati ſtabilite, ſogliono i Leibniziani dedurre. Eccovi il loro attacco, che forſe vi ſembrerà debile, ma pure eſſi ſi ſtudiano a più potere di ſoſtenerlo. Tutte le cauſe, da cui ſon prodotte le forze vive, tutti gli effetti, che le forze vive producono, ſono ſempre, come le maſſe ne' quadrati delle velocità; ma tra la cagione, e l' effetto dee paſſare una ſtrettiſſima egualità; dunque le forze vive ſono, come le maſſe ne' quadrati delle velocità.

C. Voi in queſto raziocinio omettete i tempi, in cui le forze vive o vengono prodotte dalle lor cauſe, o producono gli effetti loro; e però a procedere col metodo delle ſcuole, ſi avrebbe ad uſare una diſtinzione indicante, che nell' effetto, e nella cauſa il tempo ha luogo, ſiccome uno degli elementi.

L. E voi, Sig. Neſtore, ricevete queſta riſpoſta?

N. Altra ſicuramente non avvene, ed io la ſtringo, finchè non mi ſi levi di mano.

L. Io

L. Io all'oppoſito quantunque intorno all'argomento eſpoſto teſtè non formi giudicio alcuno, pure non piacendomi in guiſa alcuna la riſpoſta, che avete data, ſebbene ſia comuniſſima, mi ſtudierò non di ſoſtener l'argomento, ma di abbattere la riſpoſta. Voi dunque dite, che le forze vive ſaranno proporzionali alle foſſe, al numero degli elaſtri, e ad altri ſimili effetti, purchè inſieme con eſſo loro ſi computi ancora il tempo; ovvero, che le forze vive ſono in ragion compoſita delle foſſe, o del numero degli elaſtri, e di qual ſi ſia ragione diretta, o inverſa de' tempi. Non è così? Or bene: giacchè voi per anco non avete indicato il modo, con cui vuolſi introdurre il tempo, io non ſaprei qual' altra ſtrada battere, ſe non una di queſte due ſempliciſſime; di dimoſtrare prima, che cauſe eguali producono forze vive eguali, ovvero, che forze vive eguali producono effetti eguali in diverſiſſimo tempo; in oltre, che cauſe ineguali producono forze vive ineguali, o forze vive ineguali producono effetti ineguali in eguali tempi; giacchè mi accordate, che così fatte cauſe, ed effetti ſono, come le maſſe ne' quadrati delle velocità. E perchè ſembrami di non eſſere ſtato abbaſtanza chiaro: ſe io vi dimoſtro due cauſe genitrici di forze vive, le quali ſieno, come le maſſe ne' quadrati delle velocità, operanti in tempi perfettamente eguali, come mai potrete applicar i tempi per modo, che le dette cauſe vengano ad eſſere in qualſivoglia altra ragione?

N. La coſa ſarebbe ſcabroſa aſſai; perchè i tempi eguali non poſſono cangiare la proporzione. Ma diſcendete più al particolare, e moſtrate l'eſempio.

L. Dimoſtrato ſi è nel teorema ſecondo della teoria degli elaſtri (*Fig.* 1.), che poſta una ſerie d'elaſtri chiuſi applicata a' corpi A, B ineguali, e diviſa la ſerie degli elaſtri per modo in C, che il numero loro venga ad eſſere in ragion reciproca delle maſſe, ſi è dimoſtrato dico, che tutti gli elaſtri CA eſerciteranno l'energia loro contro al corpo A, e tutti gli elaſtri CB contro al corpo B; di più che queſte ſerie d'elaſtri CA, CB, ſi apriranno in tempi eguali, e che il numero CA al numero CB, ha la ragion delle maſſe ne' quadrati delle velocità; dunque le cauſe producenti le forze vive ſono, come le maſſe ne' quadrati delle velocità. Ditemi di gra-

grazia, come è poſſibile applicar i tempi, che ſono eguali dall' una parte, e dall' altra, acciocchè le dette cauſe ſieno, come le quantità del movimento?

N. Sig. Ceſare comincio ad arrendermi; perchè non ſaprei in qual guiſa ſervirmi di queſto tempo.

L. E ſe una ſola volta ſi fa veder, che il tempo in queſto genere di ricerche non ha luogo, per certo non v' entra mai. Queſto medeſimo ricavaſi dalla prima propoſizione; perchè applicate due ſerie di elaſtri ſemplici a due corpi, ed i numeri degli elaſtri ſieno in ragion reciproca de' corpi, i tempi per lo ſecondo corollario ſi ritrovano eguali: e pure i numeri degli elaſtri, cioè le cagioni producenti ſono, come le maſſe, e i quadrati delle velocità. Queſto medeſimo diſcorſo dalle cagioni ſi può portar agli effetti, conſiderando, che i corpi in luogo di prendere la velocità dagli elaſtri, la perdano ſerrando gli elaſtri.

Lo ſteſſo diſcorſo ſi può inſtituire intorno ai corpi, che chiudono ſerie d' elaſtri diverſamente raddoppiati, e che, cadendo nel ſevo, vi ſcavan foſſe. Imperocchè i tempi ſonoſi ritrovati $t : T :: \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$; dunque eſſi ſaranno eguali, quando $\frac{mn}{r} = \frac{MN}{R}$; e pure anche in queſto caſo gli effetti, cioè $rn : RN$, ſono in ragion compoſita delle maſſe ne' quadrati delle velocità, ſiccome ſi è dimoſtrato.

E per far veder più dappreſſo, da quali altezze ſi debbano laſciar cadere i corpi, acciocchè in tempi eguali ſcavino le due foſſe, ſi avverta, che $rn : RN :: mu^2 : MV^2$; dunque $n : N :: \frac{mu^2}{r} : \frac{MV^2}{R}$; ma ſuppoſti i tempi eguali ſi ha $n : N :: \frac{r}{m} : \frac{R}{M}$; dunque per la egualità delle ragioni $\frac{r}{m} : \frac{R}{M} :: \frac{mu^2}{r} : \frac{MV^2}{R}$, e però ſarà $\frac{m^2 u^2}{r^2} = \frac{M^2 V^2}{R^2}$, ovvero $\frac{mu}{r} = \frac{MV}{R}$; ma $u : V :: \sqrt{a} : \sqrt{A}$, chiamate a, A le due altezze, da cui hanno i corpi a cadere; dunque $\frac{m\sqrt{a}}{r} = \frac{M\sqrt{A}}{R}$. Onde le altezze, da cui ſi devono laſciar cadere, ſono in ragion compoſita reciproca

dupli-

duplicata delle maſſe, e diretta duplicata delle punte, di cui i corpi ſon corredati, ovver delle reſiſtenze. Torno dunque a ripeterlo, come mai i tempi in tutti queſti caſi poſſono accomodar le partite a voſtro favore?

C. Ma chi ſa, ſe i tempi da voi ſtabiliti, ſono i veri tempi impiegati dalla natura.

N. Eh Signore non richiamiamo in dubbio le coſe per noi ſtabilite, e diſcuſſe nelle paſſate giornate, che derivano da principj giuſtiſſimi, e indubitati: e ſe non v' ha altra riſpoſta diamoci per vinti, e abbracciamo la ſentenza leibniziana. Io per me ſon convinto, e credo, che il tempo non v' abbia luogo. Però ſe volete, ch' io ritratti la mia riſpoſta, la ritratto, e mi dichiaro ſoddisfattiſſimo. Solo aſpetto il voſtro giudicio intorno all' argomento leibniziano.

L. Se ho ſoddisfatto a voi, che ſiete d' intelletto docile, non ho ſoddisfatto a me ſteſſo; il quale ſapendo, quanto di così fatto tempo ſi faccia uſo, voglio ad ogni patto moſtrare, ch' egli nella maniera, che penſano, ne ci entra, ne ci può entrare. E a queſto fine reco un nuovo argomento. Io ho due cauſe ſquiſitamente eguali, che eguali forze vive producono, ma in diverſi tempi; in qual maniera cotai tempi vi riuſcirà d' introdurre?

N. Qualunque de' tempi facciaſi applicazione, queſta non può ſe non turbare la proporzione tra le cagioni, e le forze vive.

L. Prendete dodici elaſtri, e formate prima una ſerie tale, che l' uno ſia collocato dopo dell' altro; dipoi una ſeconda ſerie, in cui ſi collochino a due a due, e ſi formi una ſerie di ſei elaſtri duplicati; indi una terza ſerie, in cui ſi pongano a tre a tre, la qual ſarà di quattro elaſtri triplicati; finalmente ſi mettano a quattro a quattro, e formiſi una ſerie di tre elaſtri quadruplicati. Si ſa per lo ſecondo corollario del teorema terzo degli elaſtri, che agendo così fatte ſerie contra del medeſimo corpo, ſi otterranno velocità eguali; dunque eguali forze vive; ma eguale è il numero degli elaſtri; dunque eguali le cauſe producenti le forze vive. Ma i tempi ſaranno eglino eguali? Nò certamente, perchè, come raccoglieſi dallo ſteſſo corollario, ſaranno, come il numero degli elaſtri, che poſti ſono l' un dopo l' altro, cioè nella noſtra ipo-

ipotesi, come 12, 6, 4, 3; dunque volendo applicare questi tempi ineguali, mentre tutto il resto è eguale, si verrebbe ad ogni conto a turbare l'egualità.

Lo stesso discorso s'instituisce, se si considerano le forze vive siccome causa, e il numero degli elastri, che chiudonsi, come effetto.

Veggiamo ancora la stessa cosa nelle fosse scavate nella materia cedente. Acciocchè sieno eguali gli effetti, deve esser $rn = RN$. Si sostituisca nell'analogia de' tempi, la proporzione $n : N :: \frac{1}{r} : \frac{1}{R}$, e avremo $t : T :: \frac{\sqrt{m}}{r} : \frac{\sqrt{M}}{R}$; dunque posto $m = M$, sarà $t : T :: \frac{1}{r} : \frac{1}{R}$; ma in questa ipotesi, le velocità, e le masse sono eguali; dunque eguali le forze vive; ma eguali sono gli effetti; dunque i tempi, che sono ineguali, non potranno certamente far altro, che intricar le partite, e turbar l'egualità tra le cagioni, e gli effetti.

C. Potrebbe darsi, che in guisa, si dovesse applicar il tempo, onde ne' due casi da voi esposti, non avesse luogo applicazione veruna.

N. E assai povero, chi ricorre a così fatti partiti. Abbiamo due effetti ineguali prodotti in egual tempo; questi debbono essere certamente proporzionali alle forze vive, che li producono; ma questi effetti si ritrovano proporzionali alle masse ne' quadrati delle velocità; dunque le forze vive proporzionali alle masse ne' quadrati delle velocità: e i tempi eguali in qualunque guisa applicati, o non applicati non possono turbar questa proporzione.

Quanto all'altro caso, in cui non meno gli effetti, che le forze vive si ritrovano eguali, e i tempi ineguali; questo non prova l'asserzione leibniziana, se non indirettamente; perchè, se il tempo dovesse considerarsi, bisognerebbe, che una qualche proporzione de' tempi vi avesse luogo, la quale certamente alterarebbe l'egualità tra le cagioni, e gli effetti. Confessiamo, Signore, che il tempo dà a' Cartesiani una difesa inutile, e che la sentenza leibniziana è la vera.

L. Cotal conseguenza io sono molto lontano dal ricavare. Solamente raccolgo, che la risposta data all'argomento de' Leibniziani non sussiste. Io godo, che siate convinto; e que-

queste sole ragioni devono a mio credere convincere un intelletto ben fatto; pure, io vi prego a farla ancor da nemico, e ad esformi ciò, che pensavate intorno al modo di applicar questo tempo.

C. Eccovi il principio. Una forza tanto si avvalora, quanto più lungo tempo agisce; dunque la forza viva, che scava fosse, o chiude elastri, tanto si dee riputare maggiore, quanto più lungo tempo dura ad agire. Bisognerà dunque, ad aver l'intera energia delle forze, e per conseguenza la vera proporzion degli effetti, multiplicare la forza viva, la qual'è, come la quantità del movimento per lo tempo.

N. Così fatta applicazione, non la giudico molto opportuna; ma anzi penso, che tanto si avvalori la resistenza o dell'elastro, o della materia cedente, quanto più dura ad agire; e però, che la vera quantità degli effetti non sia il numero degli elastri chiusi, ne la quantità delle fosse, ma questa per lo tempo multiplicata; onde le forze vive, ovvero le quantità del movimento, vogliono per lo tempo dividersi, perchè riescano eguali agli effetti, che si vedono generati.

L. Voi Signori difensori della vecchia opinione siete sì ben d'accordo, che nel bel principio entrate in differenti, anzi opposte opinioni. A buon conto ne l'una, ne l'altra applicazione non serve nulla a' due casi proposti. Voi volete, che dal tempo si avvalori l'azione della forza viva, e voi, la reazion della resistenza. Fin ora avete considerata la forza viva, siccome causa; ma considerandola come effetto, e supponendo, che ad un corpo venga comunicata forza viva dall'azione d'una forza morta, ditemi quel che avverrà?

N. L'azione della forza morta resterà avvalorata dal tempo, onde la quantità del moto, divisa per lo tempo, sarà, dirò così, la misura dell'azione visibile.

C. Ed io porto opinione, che l'effetto, cioè la forza viva transfusa, resterà avvalorata dal tempo; onde l'azione riuscirà proporzionale alla quantità del movimento, ed al tempo.

L. Prima di combattere così fatte del tutto opposte opinioni, stimo bene d'esporvi un argomento contra d'amendue, fondato sull'egualità dell'azione, e della reazione, che intesi tempo fa, da un uomo d'acuto ingegno fornito. Questo argomen-

P

gomento io non intendo di addottarlo per mio, ne voglio in oggi decidere della fua efficacia. Non riceve l'una, e l'altra parte, ficcome principio fermo, ed indubitato, che l'azione è eguale, e contraria alla reazione? dunque fe l'azione della forza viva, che fcava per efempio nella creta una foffa, viene avvalorata dal tempo, dovrà fimilmente rimanere avvalorata ancor la reazione della materia cedente; ed all'oppofito, fe quefta fi avvalora, quella, in pari maniera, refterà avvalorata. Ma fe amendue dal tempo rimangono avvalorate, dovrà egli metterfi a computo tanto nella cagione, quanto nell'effetto; la qual cofa torna al medefimo, come fe computare in niuna maniera non fi doveffe.

C. In fomma, voi con quefto argomento ci fate vedere, che o tutti due diciamo il vero, o tutti due il falfo. Ma fe amendue diciamo il vero, è lo fteffo, come fe amendue diceffimo il falfo.

N. Ma, perchè non ricevete per voftro così fatto argomento? Vi fembra egli forfe poco efficace?

L. Ho detto, che in oggi non voglio pronunciar giudicio alcuno fopra di effo; e però lafciandolo da parte, m'ingegnerò intanto cogli fperimenti, e colle confeguenze accordate, di far vedere, che ne l'una, ne l'altra applicazione del tempo può effer ricevuta. Perciò lafciate, che prima me la prenda co' Cartefiani, e che interroghi il Sig. Cefare, loro protettore, quale fia ftata l'occafione di rinvenire così fatta rifpofta, a cui certo il Maeftro loro Cartefio non ha penfato giammai.

C. Comechè Cartefio non abbia avuto d'uopo d'ufare così fatta rifpofta; anzi fe ho a confeffare il vero, piuttofto dica, che la confiderazione del tempo non abbia luogo; pure fe più maturamente confiderato vi aveffe, fe ne farebbe, come i fuoi feguaci, fervito.

L. Io non vi coftringo a fare l'apologia del Cartefio; perchè fono perfuafo effer utile unicamente il rinvenire la verità, la quale non vien meno, perchè Cartefio l'abbia negata, ne acquifta pregio, perchè l'abbia riconofciuta. Vi domando fol l'occafione, perchè fonofi i Cartefiani appigliati alla rifpofta, di cui vi fiete fervito.

C. Voi la fapete meglio di me. A dimoftrare la fua fentenza produffe il Leibnizio così fatto argomento. Richiedefi

la

la ſteſſa forza ad alzare il peſo = 4 all'altezza = 1, e ad alzare il peſo = 1 all'altezza = 4; dunque eguali ſono le forze, che cotai effetti producono; ma ſe il peſo = 4 diſcende dall'altezza = 1, acquiſta tal forza, che il medeſimo peſo può ſollevare all'altezza = 1; e ſe il peſo = 1 cade dall'altezza = 4, acquiſta forza, che all'altezza = 4 può ſollevarlo; dunque le forze vive acquiſtate dal mobile = 1, cadente dall' altezza = 4, e dal mobile = 4, cadente dall' altezza = 1, ſono eguali. Ma eguali non ſarebbero, ſe ſi miſuraſſero dalle maſſe nelle velocità, perchè eſſendo queſte in ragion dimidiata dell'altezze, ſaranno come 2 : 1; ma 1 multiplicato per 2 da 2, e 4 multiplicato in 1 da 4, i quai numeri non ſono eguali. Eguali ſi ritrovan le forze vive, ſe ponganſi, come le maſſe ne' quadrati delle velocità, i quali ſono, come le altezze; eſſendo le altezze in ragion reciproca delle maſſe; dunque così voglionſi miſurare le forze vive, e non per le quantità del movimento.

Per occaſione di riſpondere a queſto argomento, ſonoſi ſerviti i Carteſiani della maſſima, che fa d'uopo di mettere in computo i tempi, in cui le due sfere paſſano le due altezze 1, 4; i quai tempi devono avvalorare le forze agenti. Poſto queſto principio, le concluſioni camminano ottimamente. La qual riſpoſta hanno di poi a tutti gli altri effetti accomodata.

L. Di grazia, o Signore, poichè non abbiamo ancor fatta parola della gravità, permettetemi, che traſporti l'argomento ai corpi, che, cadendo nel ſevo, ſcavano foſſe, ovvero, che, urtando negli elaſtri, li ſerrano; giacchè agevolmente ſi potrà adattare la ſteſſa riſpoſta agli elaſtri, che ſpiegandoſi, comunicano a' corpi la forza viva. Voi ſciegliendo la forza morta di gravità, non fate altro, che ſciegliere una forza reſiſtente, e diminuente il moto, la quale ſta in ragion delle maſſe. Conſideriamo pertanto due corpi, i quali ſieno corredati d'un numero di punte proporzionale alle maſſe loro, ovvero due corpi, i quali urtino in elaſtri, che ſieno raddoppiati per guiſa, onde il numero de' raddoppiati ſia, come la maſſa del corpo urtante.

Ciò poſto, voi dite, che le foſſe ſcavate, o il numero degli elaſtri chiuſi, ſaranno come le maſſe ne' quadrati delle velocità, non perchè in queſta ragione ſieno le forze vive;

ma perchè lo sono le forze vive avvalorate dal tempo; e giacchè il tempo è, come la velocità, se moltiplichisi per la quantità del movimento, verrà a formarsi un prodotto proporzionale alla massa nel quadrato della velocità. Ho io ben penetrato il vostro sentimento?

C. Benissimo.

L. Vi dirò di più, che ne' casi da voi per ventura scielti, il computo s'accorderà al vostro detto maravigliosamente, sicchè si vedrà chiaro, che a questi casi avete accomodata la vostra risposta. E quanto a' corpi, che scavan le fosse, accomodando le formule al caso, che il numero delle punte sia proporzionale alla massa del corpo cadente, si avrà $u : V :: \sqrt{n} : \sqrt{N}$, ed insieme $t : T :: \sqrt{n} : \sqrt{N}$; dunque $u : V :: t : T$; e però $mut : MVT :: mu^2 : MV^2$, e per conseguenza, come gli effetti delle fosse prodotte. Osservate quanro il calcolo alla vostra risposta si accomodi. Le quali formule, valendo ancora nel caso degli elastri, ne seguitano le medesime conseguenze.

C. Che volete di più. La risposta dunque de' Cartesiani non è tanto irragionevole, quanto alcuni la spacciano.

L. Ma non osservate, Signore, che questi non sono gli unici casi, a cui vogliasi soddisfare. Anzi assolutamente io professo, che in ogni altro caso, non anderà secondo i vostri disegni.

C. Egli anderà benissimo, qualor supponghiate, che il tempo, in cui si scava la fossa, o si chiudono gli elastri, sia, come la velocità iniziale.

L. Ma questo è appunto ciò, che non può esser vero, se non nel caso, che le forze morte, diminuenti il moto, sieno, come le masse de' corpi; negli altri casi non può mai essere il tempo, come la velocità iniziale. Conciossiachè, essendo le velocità $u V :: \frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}}$, ed i tempi $t : T :: \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$; dunque nell'ipotesi, che i tempi sieno, come le velocità, dovrà essere $\frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}} :: \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$; ovvero $r : R :: m : M$; cioè le resistenze, come le masse. Dunque non essendo le resistenze, come le masse, i tempi non potranno essere, come le velo-

velocità. Quindi la quantità del moto, che secondo la vostra opinione è la forza viva moltiplicata nel tempo, non sarà, come la massa nel quadrato della velocità, e però non sarà come l' effetto.

C. Quando il calcolo versava sopra la gravità, il calcolo camminava bene in favore de' Cartesiani.

L. Sì Signore. Ma ecco la ragione, onde così fatti filosofi sempre si studiano di portar in mezzo l' esempio della gravità, che ritarda il movimento, perchè essendo questa forza proporzionale alla massa, il computo alla risposta loro s'accomoda. Ma sonovi fuori della gravità casi anche semplicissimi, in cui il vostro calcolo non va bene. E tra questi si numera il caso del Poleni di due palle di egual diametro, ma di massa ineguale, che scavano fosse eguali, ovvero che chiudono un egual numero d' elastri, posti l' uno dopo dell' altro, qualor i quadrati delle velocità iniziali sono in ragion reciproca delle masse. E perchè chiaramente il veggiate, osservate, che in questi casi $r=R$, ed $n=N$; dunque $u : V :: \frac{1}{\sqrt{m}} : \frac{1}{\sqrt{M}}$, e $t : T :: \sqrt{m} : \sqrt{M}$: dunque $mut : MVT :: \frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{m}} : \frac{M\sqrt{M}}{\sqrt{M}} :: m : M$; le quali, sebben gli effetti sono eguali, eguali non sono altrimenti; dunque in questa semplicissima sperienza, il tempo, alla vostra maniera computato, non rende eguali le forze vive, siccome dovrebbero essere, essendo eguali gli effetti. E' dunque cosa superflua il fare al tempo ricorso.

C. Questa benedetta proporzione de' tempi, che per voi si stabilisce, Dio sa, se è la precisa, e la giusta. Quando i tempi sieno, come le velocità, il calcolo favorisce l' opinion, che difendo. E chi sa, che il tempo non segua sempre così fatta proporzion della velocità?

L. Queste verità sonosi per noi stabilite, e discusse nelle precedenti giornate, e si è fissata la vera proporzione de' tempi. Che occorre oggi richiamar in dubbio ciò, che voi avete volentieri accordato? Pure per togliervi di mano del tutto quest' ultima arma, ho in pronto una dimostrazione chiarissima del Co: Jacopo Riccati, che leggesi in una lettera scritta al Marchese Poleni, e da questo stampata in un' altra let-

lettera diretta all' Abate Conti; colla qual dimostrazione si fa palese un grandissimo assurdo, a cui porta la vostra supposizione de' tempi proporzionali alle velocità nello sperimento del Poleni.

Sieno AC, BC, le altezze (*Fig.* 2), da cui cadono i corpi A, B, le cui masse sono delle stesse altezze in ragion inversa; CD sia la profondità della fossa scavata dall' uno, e dall' altro mobile. Menisi per lo punto A, l' indefinita GF, parallela all' orizzonte; AE esprima il tempo, che A impiega nello scorrere AC, ed AF il tempo, che consuma nello scavar la fossa CD. Dal vertice comune C, descrivansi due parabole, che passino per li punti E, F. E perchè i tempi impiegati dai mobili nello scavar la fossa CD, per la vostra supposizione, sono, come le velocità acquistate in C, cioè in ragion dimidiata dell' altezze AC, BC, saranno, come le ordinate alla parabola, cioè AF, BI; ma AF, esprime il tempo, che il corpo A spende nello scavar la fossa; dunque BI rappresenterà il tempo, che v' impiega il mobile B.

In oltre descrivasi una terza parabola DKG, simile all' altra CHE, e solo differente di posizione; chiara cosa è, che l' ordinata AG rappresenta il tempo, in cui il mobile caderebbe da A sino in D, se tutto lo spazio fosse vuoto, e sgombro da resistenze; similmente l' ordinata BK esprime il tempo, in cui B passerebbe nel vano lo spazio BD; ma le applicate AE, BH, esprimono que' tempi, ne' quali i mobili A, B, scorrono gli spazj AC, BC; dunque le GE, KH, dinotano i tempi, in cui i mobili A, B scorrono lo stesso spazio CD nel vano, cadendo l' uno da A, l' altro da B.

Ciò dimostrato, e premesso, si prenda nell' asse CA il punto B per modo, che KH riesca eguale a BI. Per le cose dette BI esprime il tempo, in cui B, cadendo da B, fa la fossa CD; KH esprime il tempo, in cui B, cadendo da B, scorre nel vano lo spazio CD; dunque quel tempo è eguale a questo; la qual conseguenza è assurda, perchè non è possibile, che colla stessa iniziale velocità si passi nello stesso tempo uno spazio vacuo, ed uno spazio ripieno di resistenze. Crescerà l' assurdo, se prenderete un punto L, posto tra B, C; perciocchè, cadendo da L un corpo, che abbia ad A ragion reciproca dell' altezze LC, AC, scorrerà più presto

presto lo spazio CD, mentre è ripieno di sevo, che mentre d'ogni resistenza è sgombrato.

C. Ma è egli possibile, che si trovi un tal punto B, per cui riguardo riesca $KH = BI$.

L. Non pur possibile, ma necessario. Conciossiachè movendosi la retta KI, fino in C con moto parallelo, la BI si annullerà, ma la KH rimarrà una quantità finita; muovetela ora in alto, la BI va crescendo, diminuendosi la KH; finchè questa diverrà minore di quella; altrimenti l'assurdo sarebbe perpetuo; dunque è necessario, che in una qualche posizione riesca $BI = KH$.

Per altro con brieve, e spedito calcolo la posizione del punto B, si determina nella seguente maniera: Chiamisi $AE = T$, $AF = t$, $AC = A$, $BC = x$, $CD = n$. Per la natura della parabola, che unicamente maneggiasi, si avrà

$$CA : CB :: AF^2 : BI^2$$

$$A : x :: t^2 : BI^2 = \frac{t^2 x}{A}; \text{ dunque } BI = \frac{t\sqrt{x}}{\sqrt{A}}$$

$$CA : CB :: AE^2 : BH^2$$

$$A : x :: T^2 : BH^2 = \frac{T^2 x}{A}; \text{ dunque } BH = \frac{T\sqrt{x}}{\sqrt{A}}.$$

$$CA : DA :: AE^2 : AG^2$$

$$A : A+n :: T^2 : AG^2 = \frac{T^2 . \overline{A+n}}{A}, \text{ ed } AG = \frac{T\sqrt{A+n}}{\sqrt{A}}.$$

$$DA : DB :: AG^2 : BK^2$$

$$A+n : n+x :: \frac{T^2\ \overline{A+n}}{A} : BK^2 = \frac{T^2 . \overline{n+x}}{A}; \text{ dunque } BK = $$

$$\frac{T . \sqrt{n+x}}{\sqrt{A}}; \text{ dunque } BK - BH = KH = \frac{T . \overline{\sqrt{n+x} - \sqrt{x}}}{\sqrt{A}}; \text{ ma per la}$$

condizion del problema $BI = KH$; dunque $\frac{t\sqrt{x}}{\sqrt{A}} = \frac{T . \overline{\sqrt{n+x} - \sqrt{x}}}{\sqrt{A}}$,

ovvero $\overline{T+t} . \sqrt{x} = T . \sqrt{n+x}$, ed alzando al quadrato

$T^2 x$

$T^2 x + 2 T t x + t^2 x = T^2 n + T^2 x$, ovvero $x = \frac{T^2 n}{2Tt + tt}$: come ſi dovea dimoſtrare.

N. Sembrami queſta lettera del Co: Riccati al Marcheſe Poleni ſimile a quella, che il Sig. di Fermat ſcriſſe al celebre Gaſendo, la quale chiuſe le parole in bocca a tutti coloro, che, la teoria oppugnando del Galileo, volevano, che i gravi cadenti per iſpazj eguali acquiſtaſſero gradi eguali di velocità, ſcoprendo il palpabile aſſurdo, a cui conduceva il loro penſiero; così la preſente lettera del Co: Riccati, leva aſſolutamente a' Carteſiani la riſpoſta loro, moſtrando, che in un aſſurdo patente va a terminare.

C. Egli è parecchi anni, che queſto argomento è ſtato prodotto. E non v' ha alcuno, che abbia proccurato di riſpondergli? So, che il Sig. Marzagaglia ſi ſtudia di renderlo infermo; ma l' oppoſizione non mi convince.

L. Contro ad una ſoda, e ben fondata dimoſtrazione ſi può produr qualche equivoco, ma eſſa ſoſtenuta dalla ſua forza trionferà di tutte quante le oppoſizioni. Anche il P. Crivelli ſi sforza di dare all' argomento una qualche riſpoſta; ma ſiccome in leggendola ho chiaramente compreſo, che non ſuſſiſte, così m' è sfuggita interamente dalla memoria. Onde ſe volete informarvene prendete il libro, e leggete.

C. *Per riſolvere queſta obbiezione reſta prima da ſtabilire, come vengano da' Carteſiani ſtabiliti codeſti tempi. Imperocchè ſe ſi ſuppongono i tempi dell' azioni minori, come ſi voglia, de' tempi delle cadute non è da dubitar dell' obbietto. Ma ſe i tempi...*

L. Fermatevi. Sicchè ſe i tempi, in cui ſi forman le foſſe ſieno minori de' tempi delle cadute, l' obbiezione del Co: Riccati ſuſſiſte, e ponendo i tempi, in cui ſi fanno le foſſe, come le velocità, ſi dà manifeſtamente di petto nell' aſſurdo. E perchè non poſſono eſſere i tempi, in cui ſi ſcavano le foſſe, minori de' tempi delle cadute? Non mi è lecito di adoprare una materia reſiſtente ſempre più, e più fino all' infinito? Ma creſcendo la reſiſtenza della materia molle, ſi fanno minori i tempi, in cui ſi forman le foſſe, e ſe quella ſarà infinitamente grande, queſti ſaranno infiniteſimi; dunque i tempi, in cui ſi fanno le foſſe, poſſono eſſer minori di quelli delle cadute. Ma ſe la difeſa de' Carteſiani in un caſo ſolo è aſſur-

affurda, cade in tutti gli altri. Ed offervate, che ad ottenere, che le foffe fi formino in tempi minori di quelli delle cadute, non fa meftieri d'una maffima refiftenza; ma bafta, ch' ella fia maggior della gravità.

N. Se mai il P. Crivelli avrà fatto alcuno di cotali fperimenti, io fon ficuro, ch'avrà veduto ocularmente, che la foffa fi fcava in un tempo notabilmente più breve di quello, in cui il mobile difcende per l'aria; perciocchè il tempo della caduta è tanto fenfibile, che fe ne diftingue il principio, il mezzo, ed il fine; laddove la foffa fcavafi così prefto, onde appena incomincia, che è già finita. Ma quando anche non fi fidi di quefta offervazione oculare; mi dica egli, la profondità della foffa non è incomparabilmente minore dello fpazio, da cui il mobile s'è lafciato cadere? la velocità, con che s'incomincia a formar la foffa, non è la fteffa colla velocità terminale della difcefa? dunque il tempo, in cui fi paffa la profondità della foffa, dee effer minore di quello, in cui fi fcorre l'altezza, d'onde fi lafcia cadere il mobile. Sicchè dunque tanto è lontano, che i tempi dello fcavarfi le foffe non poffano effer minori de' tempi delle cadute, che ne' medefimi fperimenti, i quai fi fon fatti, riefcono minori in effetto.

L. Ma veggiamo quel, che dice il dotto Padre nell' ipotefi, che i tempi, ne' quali fi fcavan le foffe, minori non fieno de' tempi delle cadute.

C. *Ma fe i tempi*, fegue il Crivelli, *fono maggiori, o eguali ceffa l' affurdo. Pofti dunque i tempi eguali a quelli delle cadute, farà la parabola* CIF *la fteffa, che la parabola* CHE; *ed allora l' intercetta* KH *non può mai effere eguale, e maggiore dell' ordinata* BI.

N. Quefto è un volermi moftrar l' impoffibile. Ma fe io muovo verfo il punto D la retta KI per modo, che fi mantenga parallela a fe fteffa, arrivata ch' ella fia al punto C, la BI farà nulla, e la KH, che allora farà ordinata della parabola DG, farà finita; dunque in tal cafo la KH infinitamente maggiore della BI. Muovendo la fteffa KI all' in sù, anderà crefcendo la BI per tutti i gradi, e la KH, fi manterrà fempre finita; dunque per qualche tratto KH fi manterrà maggiore della BI, finchè fi arriverà ad un determinato punto B, in cui quefte linee, per li fuoi gradi varian-

Q do,

do, ſi troveranno eguali. Di ſopra poi al punto B, la KH ſarà minore della BI. E dunque neceſſario, che vi ſia un punto B, ove le predette linee rieſcano eguali, di ſotto al quale la KH ſupererà la BI. Laonde, anche prima d'averla aſcoltata, pronuncio, che la dimoſtrazion del Crivelli non può eſſere, ſe non un patente paralogiſmo.

C. *Imperocchè ſia* $BH = z$, $KH = y$, $CB = x$, $CD = a$, *ſarà* $BD = a + x$, $BK = z + y$; *e per natura della parabola, poſto il parametro* $= 1$, $zz = x$, *e* $zz + 2yz + yy = a + x$. *Sottraendo dunque i termini eguali* zz, *e* x *ſi avrà* $2yz + yy = a$, *dove ſi trova* $y = \sqrt{a + zz} - z$, *nella qual' eſpreſſione facilmente ſi conoſce, che* y *dee ſempre eſſer minore di* z.

N. Ma ſe $z = 0$, ſi trova $y = \sqrt{a}$, cioè maggiore di z; come dunque quell' eſpreſſione indica, che y debba eſſer minor di z?

C. Aſcoltatene la ragione; *perchè*, ſiegue egli, *ſe foſſe eguale, ſi avrebbe* $2z = \sqrt{a + zz}$, *e perciò* $z = \sqrt{\frac{a}{3}}$, *il che è impoſſibile. Ne parimente può eſſer maggiore, perchè ſe foſſe per eſempio* $2z$, *ſi avrebbe* $8zz = a$, *e perciò* $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}$, *il che parimente è impoſſibile.*

N. Le conſeguenze ſono veriſſime, ma vorrei, che mi ſi diceſſe, perchè impoſſibili? Si tagli $CB = \frac{a}{3}$, e ſi avrà $z = \sqrt{\frac{a}{3}}$. Si tagli $CB = \frac{a}{8}$, e ſi avrà $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}$.

C. Io giurerei, che il P. Crivelli ha penſato, che ſi debba prendere una terza, od una ottava parte di DC, e che dai punti della diviſione debbanſi condur le ordinate alle parabole CF, CE, lo che ſarebbe aſſolutamente impoſſibile. Ma ſe è fondata ſopra un puro equivoco l' oppoſizion del Crivelli, non meno lo è quella del Marzagaglia. Conciossiachè ſieno poſti i corpi in A, B, il punto, in cui l' ordinata alla parabola CF eguaglia l' intercetta tra le due parabole, non è in B, ne ſovra di B, ma di ſotto; onde l' argomento non prova nulla. Così il Marzagaglia.

N. Il punto, ove l'ordinata alla parabola CF eguaglia l' in-

tercetta

terceтта tra le due parabole, è fiſſo, e coſtante per modo, che cangiato il corpo B, e per conſeguenza la diſtanza BC, egli non cangierà. Supponghiamo un tal punto L. Si faccia dunque CL : CA : : A : B; ed allora il corpo B, dovrà cadere dal punto L; ſe poi ſi prenderà il corpo B di maggior gravità, biſognerà laſciarlo cadere da una altezza minore di CL. E dunque patente la fallacia nella rifleſſione del Marzagaglia.

L. Penſo, che ſarà bene diſcoprir il fonte, d'onde giudico eſſer derivata la dimoſtrazion del Co: Riccati. I due corpi A, B cadono da due altezze AC, BC, che ſono in ragion reciproca delle maſſe; dunque il corpo men grave A ha acquiſtato in C maggiore velocità, che l'altro più grave B; dunque il corpo A incomincia a ſcavar la foſſa con maggiore celerità di quella, con che incomincia a formarla il corpo B; ma amendue formano la ſteſſa foſſa, e per conſeguenza ſcorrono lo ſteſſo ſpazio CD impedito dalle medeſime reſiſtenze. Non è egli manifeſto, che più preſto ſi dee paſſare così fatto ſpazio, da chi incomincia a ſcorrerlo con maggiore celerità? dunque il corpo A dee ſcavare la foſſa in tempo minore di quello, in cui viene ſcavata dal corpo B; dunque la velocità di A eſſendo maggiore di quella di B, ed il tempo, in cui ſcavaſi la foſſa da A eſſendo minore del tempo, in cui viene ſcavata da B; ne ſegue per evidentiſſima conſeguenza, che i tempi accennati non poſſono eſſer in ragion delle velocità. Dietro a queſto lume portandoſi io penſo, che a poco a poco il Co: Riccati ſia arrivato all'aſſurdo, che ha dimoſtrato conſeguire dalla poſizion carteſiana.

C. Diſpiacemi aſſai, che non ſi poſſa generalmente affermare, eſſere i tempi interi proporzionali alle velocità, onde s'incominciano a ſcavar le foſſe, o a chiuder gli elaſtri; perchè viene a cader a terra un belliſſimo penſiero del Sig. di Mairan, il quale mi è ſempre ſembrato non men ingegnoſo, che convincente.

N. Le lodi, di cui ſiete liberale a così fatto penſiero, mi mettono deſiderio d'intenderlo; onde vi prego ad eſporlo; giacchè anche queſto biſognerà ſuggettarlo ad un giuſto eſame.

C. Ma baſta, che mi neghiate eſſer i tempi in quella proporzione, ch'egli ſuppone; ch'egli è per terra.

L. Nò, Signore, non bisogna, che l' ingegnoso pensiero del Sig. di Mairan si passi sotto silenzio; e benchè io non mi tolga la libertà di mostrare, ch' ei non sussiste, se i tempi, in cui si scavano le fosse, o si serrano gli elastri, non sono in proporzione delle velocità; pure vi do parola di discuterlo ancora in questa supposizione.

C. Il maschio della dottrina dell' ingegnoso Mairan sta posto in queste due proposizioni.

Prima proposizione. Non già gli strati passati nella materia cedente, ne gli elastri chiusi con moto ritardato, sono la misura della forza motrice, ma gli strati non passati, e gli elastri non chiusi, e che lo sarebbero stati d' un moto uniforme in ciascun istante.

Proposizione seconda. Questi elastri non chiusi, e questi strati non forati, sono sempre in ragione delle velocità iniziali.

Dalle quali proposizioni, ne nasce per legittima conseguenza, che la forza serba la ragione delle semplici velocità.

N. Questa dottrina esposta tanto in breve a me, che sono alquanto duro di testa, riesce così oscura, e piena di tenebre, che nulla io non ne intendo.

C. Sarei affatto privo di senno, se credessi d' essermi spiegato per modo, che ognuno intendere mi dovesse. Ho premesse queste proposizioni, perchè si vegga il metodo del raziocinio; per altro fa di mestieri dichiararle ad una ad una. Ma prima è necessario metter in chiaro, che cosa egli intenda per istrati non forati, e per elastri non chiusi, e che lo sarebbero con moto uniforme.

Concepiamo due mobili perfettamente eguali, giacchè in questi prende l' esempio il Sig. di Mairan, i quali da diverse altezze cadendo, scavano fosse all' istesse altezze proporzionali. Le velocità, siccome i tempi ancora, saranno in ragion dimidiata dell' altezze. Ponghiamo, che le altezze stiano, come 4 : 1; onde le velocità con che s' incominciano a scavar le fosse, sono come 2 : 1, siccome ancora i tempi, ne' quali si scavano. Si dica il primo corpo A, il secondo B. S' intendano divisi i tempi in eguali particelle, ovvero de' due tempi, si prenda una misura comune; e perchè siamo nella ragione di 2 : 1, però prenderemo per misura comune a' due tempi,

tempi, il tempo, in cui dal corpo B si scava la fossa, che supporremo un secondo. Ciò posto mettiamo, che la profondità della fossa scavata dal mobile B, sia d'un pollice. Se il mobile B niente perdesse di sua velocità, e viaggiasse con movimento equabile, ed uniforme, passerebbe in un secondo due pollici, e scaverebbe una fossa nel sevo di due pollici; ma non la scava se non d'uno; dunque tutti gli strati per lo spazio d'un pollice sono gli strati non passati, ma che lo sarebbero con moto equabile in un secondo di tempo; dopo il qual tempo essendosi nel corpo B estinto ogni movimento, non si possono dal mobile altri strati passare.

Ma il corpo A, che comincia ad iscavar la fossa con velocità $= 2$, passerebbe nel primo secondo con moto equabile quattro pollici, e di quattro pollici sarebbe la profondità della fossa scavata; ma non ne scava se non tre; dunque in questo primo secondo la profondità della fossa non iscavata, ma che lo sarebbe con moto equabile, è d'un pollice. Ma il mobile al fine del primo secondo, dopo aver passati tre pollici, ritrovasi aver perduta la metà della velocità, che aveva, e non gliene rimane se non un grado; dunque con moto equabile nell'altro secondo passerebbe due pollici; ma non ne passa se non uno; dunque la profondità della fossa nel secondo tempo non iscavata è d'un pollice, il quale si passerebbe con moto uniforme. Prendendo amendue le profondità ne' due secondi non iscavate, avremo una profondità di due pollici non iscavata, e che lo sarebbe con equabile movimento. Dopo di ciò, essendosi dal corpo A ogni movimento perduto, altra fossa non iscavasi; onde la profondità della fossa non iscavata dal corpo A è di due pollici, e quella del corpo B è d'un pollice, le quali fosse verrebbero certamente scavate con moto equabile. Ed eccovi ciò, che intenda il Mairan per quegli effetti, i quali non son prodotti, ma che lo sarebbero con equabile movimento; giacchè lo stesso si dee dire degli elastri, e di tutti quanti i possibili effetti.

L. Proseguite pure, e provate le proposizioni premesse dopo d'aver esposta la diffinizione.

C. La prima si è, che non gli strati passati, ma gli strati non passati, e che lo sarebbero con movimento uniforme, sono i veri effetti della forza viva consumata, e però ch'essa

fa deve effer a quelli proporzionale. Ed eccovene la ragione chiariffima. Gli ftrati non paffati ad ogni iftante, rapprefentano la forza perduta, e confumata in quello iftante, ovvero, lo che torna lo fteffo, la refiftenza della potenza contraria, che la diftrugge efercitandofi contra di effa; ma la fomma di tutte le forze perdute, ovvero di tutte le refiftenze contrarie è eguale alla forza totale del mobile; dunque ec. A dar tutta la forza all'argomento, altro non rimane, fe non fe d' illuftrare, ficcome gli ftrati in ogni iftante non paffati fieno la mifura della forza perduta, ovvero della refiftenza contraria, che la diftrugge. La qual cofa per amore di brevità, proccureremo di fare nella maniera, che fegue. La perdita della forza deve effer proporzionale non a quegli ftrati, che fonofi di fatto paffati, ma a quelli, che paffati fi farebbero, fe la forza mantenuta fi foffe coftante, e invariata, cioè a dire agli effetti, che fono ftati impediti.

L'altra propofizione, cioè che gli ftrati non paffati fono proporzionali alle velocità iniziali, è di faciliffima prova. E' chiaro dal noftro progreffo, che quefti ftrati non paffari, fono proporzionali ai tempi, perciocchè ad ogni tempicello uno corrifponde di cotai fpazj; ma i tempi fono, come le velocità; dunque le profondità delle foffe non ifcavate fono come le velocità iniziali. Ed eccovi meffa in chiaro con brevità la nuova meditazione del Sig Mairan.

L. Mi ha fempre cagionata maraviglia la confidenza d'alcuni, i quali volendo fiffare una teoria univerfale, non efaminano fe non una particolare ipotefi, e fe veggono, che ad effa la teoria vada bene, francamente la fpacciano per univerfale. Così fembrami effer avvenuto al Sig. Mairan, il quale volendo ftabilire generalmente, che gli effetti non prodotti, e che lo farebbero con equabile movimento, fono proporzionali alla forza viva, fecondo che viene da lui mifurata, cioè alla quantità del movimento, non efamina fe non l' ipotefi de' corpi eguali, ed in una fola circoftanza, quando, cioè le refiftenze fono proporzionali alle maffe, a cui fi oppongono. Dunque prima di ricevere la fua teoria, farà di meftiere efaminare, fe nell'altre ipotefi, e circoftanze, la fua teoria lo conduca a quel termine, ove ha difegnato d'andare. E quanto all'egualità de' corpi non iftarò gran fatto a difputare, per-

perciocchè posti anche i corpi disuguali, quando le masse loro sieno, come le resistenze, il suo discorso lo condurrà allo stesso termine. Ma se prenderemo l' ipotesi delle resistenze non proporzionali alle masse, non so quanto contraria possa esser da' suoi pensieri la conclusione.

Trattiamo dunque la cosa generalmente, e premettiamo alcuni principj, che per voi, il quale sostenete le parti del Sig. di Mairan, sarannomi facilmente accordati. Domando, codesti strati non passati, ma che lo sarebbero con moto equabile, sono essi proporzionali unicamente a' tempi, o fa di mestieri introdurvi qualche altro elemento?

C. Nel caso del Mairan riescono certamente proporzionali ai soli tempi. Ma questo addiviene, perche i mobili nell' ultimo tempicello eguale, dopo cui resta estinto ogni movimento, passano eguali spazj. Ma quando in questi ultimi eguali tempicelli, si passassero spazj disuguali, dovrebbero questi spazietti per certo compor la ragione degli strati non passati, e che passati si sarebbero con moto uniforme.

L. Non ho alcun dubbio, che così esser non debba; dunque cotai strati non passati saranno sempre in ragion composita dei tempi, in cui si fanno le fosse, e degli spazietti passati nell' ultimo tempicello eguale, che è parte aliquota di amendue i tempi interi. Ma replicatemi, e ditemi, se così fatti spazj non passati, di cui ritrovata abbiam la ragione, debbano secondo la dottrina del Sig. Mairan essere sempre proporzionali alla forza viva, che si consuma?

C. E perchè nò? Io non ne ho mai dubitato, e però mi sembra anzi che nò strana la presente domanda.

L. Osservate bene, e pensate a ciò, che rispondere; perchè in così fatta supposizione non saprei, se il calcolo in qualunque ipotesi dei tempi vi portasse allo scopo desiderato. Dichiarerò meglio la mia domanda. Se le resistenze della materia cedente fossero disuguali, come se un corpo vi penetrasse con due punte, l' altro con una, le forze vive, secondo il sistema del Mairan, avrebbero ad esser proporzionali agli strati non passati, oppure anche alle resistenze?

C. In questa ipotesi non considerata mai dal Mairan certamente io credo, che le resistenze vi debbano entrare, come una delle ragioni componenti; perciocchè più di forza viva di-

strut-

ſtrutta s' indica dagli ſtrati non paſſati, quando eſſi di maggior reſiſtenza ſieno dotati.

L. Sicchè ſecondo il ſiſtema del dotto franzeſe la forza viva, interamente conſumata, o ſia la quantità del movimento, dovrà eſſer in ragion compoſita delle reſiſtenze, de' tempi, e degli ſpazj nell' ultimo tempicello eguale paſſati. Veggiamo ſe il calcolo a così fatta conſeguenza conduca. Si chiami il tempicello, che è la parte aliquota dei due tempi $= \theta$; e gli ultimi ſpazj, in queſto tempo paſſati, dicanſi s, S. Ritenute nel rimanente le denominazioni, altre volte uſate, avremo ſecondo le leggi del Galileo $t^2 : \theta^2 :: n : s$; dunque $s = \frac{n\theta^2}{t^2}$. Similmente $T^2 : \theta^2 :: N : S$; dunque $S = \frac{N\theta^2}{T^2}$. Quindi $s : S :: \frac{n\theta^2}{t^2} : \frac{N\theta^2}{T^2} :: \frac{n}{t^2} : \frac{N}{T^2}$; dunque $st : ST :: \frac{n}{t} : \frac{N}{T}$: ma $t : T :: \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$; dunque $st : ST :: \frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}}$: ma $n : N :: \frac{mu^2}{r} : \frac{MV^2}{R}$; dunque $st : ST :: \frac{\sqrt{rm}}{\sqrt{rm}} . u : \frac{\sqrt{RM}}{\sqrt{RM}} . V :: u : V.$ Eccoci dove ci ha portato il calcolo: veggiamo ſe queſto ſia il termine, ove vorrebbe giugnere il Mairan. Per lui biſognerebbe, che fuſſe $rst : RST :: mu : MV$; la qual proporzione non può accordarſi con quella, che ſi è ritrovata per noi, quando le reſiſtenze non ſieno come le maſſe; dunque in ogni altro caſo la teoria manca, ne ſerve all' intento.

N. E molto più mancherebbe, ſe ſi pretendeſſe, che le forze aveſſero ad eſſere, come $st : ST$, non computando la reſiſtenza; perchè ciò non potrebbe in altro caſo verificarſi, ſe non quando le maſſe foſſero eguali. Per quanto bella però ſia la macchina, ed ingegnoſa; pure non ſerve all' uſo, onde è ſtata inventata.

C. Io non ho dubitato, che tal eſito non doveſſe il calcolo avere, quando ho veduto, per voi ſupporſi, eſſer i tempi in quella proporzione, che avete già dimoſtrata. Ma ſin da principio, prima di metter in campo ciò, ch' avea penſato il Mairan, erami chiaramente ſpiegato, eſſer coſa deplorabile, che

che a cagione di questi tempi ruinasse un così bello, e ben inteso disegno. Ed intanto mi son indotto ad esporlo, in quanto voi mi avete promesso di esaminarlo nelle stesse supposizioni del Mairan, cioè a dire supposti i tempi sempre mai proporzionali alle velocità.

L. Non avete ritenute ben a mente le mie espressioni. Io dissi allora, che quantunque non m'impegnassi di tacere quello, che accade nella vera supposizione de' tempi; pure che io non mi farei gravato d'esaminare quella teoria, amesso eziamdio che i tempi sieno come le velocità, e dissimulata la falsità di così fatta supposizione. Alla prima parte ho soddisfatto, soddisfarò ora all'altra. E non pensiate, ch'io sia per dire, che anche ricevuta così fatta proporzione dei tempi il calcolo non ci porti al disegno del Mairan; anzi asseverantemente vi dico, che l'ultima conseguenza dimostrerà essere sempre mai le quantità del movimento proporzionali alle resistenze, ai tempi, e agli spazj nell'ultimo tempicello eguale passati. Ed eccovene la dimostrazione. Poco anzi si è fatto vedere essere $st : ST :: \frac{N}{T} : \frac{n}{t}$; ma $n : N :: \frac{mu^2}{r} : \frac{MV^2}{R}$; di più $t : T :: u : V$, secondo l'ipotesi, in cui siamo, de' tempi proporzionali alle velocità; dunque $st : ST :: \frac{mu}{r} : \frac{MV}{R}$, e però $rst : RST :: mu : MV$; dunque la proporzion degli spazj non passati, e delle resistenze, è la stessa colla proporzione, in cui sono le quantità del movimento, ovvero le forze computate alla foggia de' Cartesiani: conseguenza, per cui il dotto franzese dovrebbe trionfarne, non che andarne contento.

C. Avete ragione di non ammettere volentieri la supposizione, che i tempi dello scavar le fosse sieno, come le velocità, mentre ciò supposto la teoria del Mairan è universalissima, ne suggetta ad eccezione di sorte alcuna.

L. Ma potrebbe accadere, che una teoria non isgarasse nelle conseguenze, ed insieme non reggesse ne' principj. Però dopo avere con sincerità geometrica fatto vedere, che le conseguenze van bene, disaminiamo con minutezza, se sieno egualmente buoni i principj.

C. Avete già dimostrato, che qualche errore ne' principj ritrovasi; poichè suppongonsi i tempi, come le velocità, e voi

avete dimoſtrato eſſer molto diverſa la proporzione de' tempi.

L. Di queſto abbiamo parlato abbaſtanza, nè è mia intenzione di rimetterlo di nuovo ſul tappeto. Ad altre coſe voglio aver l'occhio; ed ho in animo di diſaminare, ſe ben ſuppongaſi, che quel mobile, il quale ſi porta abbaſſo nel ſevo per 5, 3, 1 dito, nello ſteſſo tempo penetrerebbe con moto equabile 6, 4, 2 dita.

C. La coſa pare evidente, e naſce non meno dalla teoria del moto accelerato per una forza coſtante, che dall'idea del moto equabile, in cui niuna perdita di velocità ſi faceſſe.

L. Queſto è un punto, che è ſtato diſcuſſo dalla Marcheſa di Chaſtelet nelle ſue inſtituzioni fiſiche, e molto più a lungo nella lettera, che in ſua difeſa ha ſcritto contro al Signor di Mairan; ed io interrogando, mi ſtudierò d'eſporvi i penſieri di queſta ingegnoſa dama. Il mobile, che avendo due di velocità, paſſa nel primo ſecondo tre ſtrati profondi un dito, v'impiega egli neceſſariamente della forza per penetrarli sì, o no?

C. Non v'ha dubbio, che per confeſſione del Mairan v'impiega quell'uno di forza, che corriſponde al quarto ſimile ſtrato non paſſato, e che ſi paſſerebbe con moto equabile, e forza coſtante.

L. E ſenza ſpendere, e conſumar forza, ſarebbe egli poſſibile, che paſſaſſe pur uno ſtrato groſſo quanto un foglio di carta?

C. Ogni reſiſtenza conſuma forza; onde ſebbene minor forza ſi perderà, quanto è men profondo lo ſtrato penetrato; pure una qualche picciola parte è neceſſario, che ſi conſumi.

L. Paſſo innanzi, e vi domando, ſe il mobile iſteſſo, viaggiando con moto equabile, e con forza coſtante paſſerebbe veracemente i quattro ſtrati nell'iſteſſo ſecondo.

C. Li paſſerebbe.

L. Ma in trappaſſar codeſti ſtrati, avrebbe egli impiegata, e conſumata forza sì, o nò?

C. Biſogna dire aſſolutamente che nò, perchè ritrovaſi avere al fine la velocità, che aveva al principio.

L. Qual forza adunque ha penetrati codeſti ſtrati? giacchè eſſi penetrar non ſi poſſono ſenza forza per la voſtra medeſima confeſſione.

C. Que-

C. Questo altro non prova, se non che il mobile, essendovi resistenza, non può viaggiare con moto equabile; ma altresì è vero, che se viaggiasse equabilmente nel secondo, i quattro strati penetrerebbe.

L. Ma non vi accorgete, che per mezzo della vostra risposta date di petto in una manifesta contraddizione? Imperciocchè se dove evvi resistenza, il moto non può esser equabile, non si può ne per ipotesi supporre, che la resistenza si vinca con moto equabile, e non ritardato; perchè altrimenti la resistenza resterebbe vinta da forza nulla; la qual vittoria è tanto impossibile, quanto che un principe senza ne pur un soldato superi una ben munita, e ben difesa trinciera. Ed acciocchè questo si veda con più chiarezza. Se viaggiando il mobile equabilmente si vince la resistenza di quattro strati in un secondo, o questa resistenza è vinta da un altro agente, o dalla forza del corpo; se da un altro agente, già siamo fuor di quistione; se dalla forza del corpo; dunque questa si diminuisce; dunque il moto non può esser equabile; dunque la vostra supposizione vi porta chiaramente all' assurdo. Che se non si può supporre, che equabilmente viaggiando il mobile penetri nel primo secondo quattro strati, vano pensiero si è il credere, che la forza consumata nel penetrare nello stesso tempo i tre strati sia proporzionale alla resistenza del quarto strato, il qual ne si penetra, ne si può suppor, che si penetri equabilmente. Ingegnosa per tanto si è, ma poco salda la speculazion del Mairan, che tanto piaceva. Io ho dissimulato ciò, che altre volte ho disaminato, che egli crede, doversi nel moto equabile lo spazio, in un dato tempo passato, siccome effetto assegnare alla forza viva. Ma voi, Sig. Nestore, che state pensando. Sembrami, che andiate spaziando per l' altro mondo.

N. Pensava, come convincere un mio contadino, il quale mi vuol dare a bere di durare maggior fatica di quella, che dura in effetto.

C. Qual capriccio in mezzo all' austere speculazioni, di che trattiamo, vi viene in testa?

N. Ascoltate. Io ho nella mia villa una picciola macchinetta, per cui si fanno varj giuochi; ma perchè l' acqua non è pronta, bisogna alzarla a forza di braccia. Or costui vuole,

che alzando quattro fecchj d' acqua faccia forza, e fi ftanchi come quattro; ed io veggio, che non può ftancarfi fe non come due.

C. E perchè?

N. Volete voi, che egli eferciti più di forza, alzando l'acqua, di quello, che l'acqua efercita difcendendo? Or chi non fa, che richiedendofi due minuti a vuotarfi il cilindro ripieno d'acqua, nel primo minuto non efercita forza fe non d'un grado; perchè fe l'acqua fi moveffe con moto equabile, ritenendo la velocità, che aveva al principio, farebbe alla macchinetta far quattro giri; non ne fa fe non tre; dunque uno è il giro, che non fa, ma che farebbe con moto equabile, al quale, effendo proporzionale la forza impiegata, l'acqua non ha efercitato fe non un grado di forza. Nel fecondo minuto fa fare un giro alla macchinetta, la qual, fe il moto fuffe equabile, ne farebbe due; dunque ripetendo il difcorfo, fi troverà, che l'acqua non efercita fe non due gradi di forza.

L. Lafciamo omai ftar in pace il Sig. di Mairan, la cui memoria viverà fempre gloriofamente nella repubblica letteraria per li molti ingegnofi, e mafchi ritrovati, di cne l'ha arricchita. Quantunque il prefente fiftema, per confeffarvi ingenuamente, non mi fia mai piacciuto, effendomi fempre paruta cofa fuori del naturale, che la forza impiegata debba effere mifurata da quegli effetti, ch'ella in realtà non produce; ma bensì da quelli, ch'ella produce in effetto. E di fatto, quel che refifte, altro non è, che la tenacità degli ftrati, che fupera; dunque a quefti deve effer proporzionale la forza impiegata, e perduta. Io fo, che tutta quefta teoria è nata dal prefupporfi, effer lo fpazio in dato tempo paffato effetto della forza viva; la qual cofa non effendo vera, ficcome nella prima giornata abbiam dichiarato, non può effer vera ne pur la teoria, che fopra di lei fi è fabbricata. Ma lafciamo ftar in pace il Mairan, e tutti gli altri Cartefiani; onde io, che fin'ora ho avuto a fare col Sig. Cefare, mi rivolgo prefentemente contra di voi Sig. Neftore, il quale avendo non ha molto ai fonti inglefi bevuto, imparato avete da quella dotta nazione, con quali rifpofte andar fi debba incontro alle fperienze, che in apparenza favorifcono il Leibnizio. Però ditemi il fondamento della

della vostra risposta, o piuttosto rinovatemene la memoria, giacchè le molte cose dette me ne hanno fatto perder la traccia.

N. Io seguendo gl' Inglesi, batto una strada affatto contraria a quella, che hanno i Cartesiani segnata: essi pensano, che la forza rimanga avvalorata dal tempo; io anzi credo, che la resistenza, la qual' estingue la forza viva, dal tempo medesimo si avvalori: onde che non le fosse, o gli elastri chiusi sieno l' intero effetto delle forze vive, ma che l' effetto sia in ragion della fossa, o degli elastri chiusi, e del tempo. Laonde le fosse, gli elastri chiusi ec. non sono proporzionali alla forza viva, ma a questa divisa per lo tempo.

L. Sì, me ne ricordo: ma ditemi sinceramente, quanto vi gradisce così fatta risposta.

N. A me, quando la lessi, è piaciuta, e piacerebbe pur tuttavia, se le difficoltà generali, che avete portate nel principio di questa giornata non m' avessero fatto entrar in coscienza. E quel che mi lusingava maggiormente, si era, che la sperienza del Poleni, di cui si fa tanta stima, con sì fatta risposta riceve una spiegazione compiuta. Conciossiachè essendo in questo caso $N = n$, $R = r$, conservo i simboli, di cui vi siete servito, sarà $t : T :: \sqrt{m} : \sqrt{M}$, ed $u : V :: \frac{1}{\sqrt{m}} : \frac{1}{\sqrt{M}}$; dunque $\frac{mu}{t} : \frac{MV}{T} :: \frac{m}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{m}} : \frac{M}{\sqrt{M} \cdot \sqrt{M}} :: 1 : 1$; dunque le forze, o sia le quantità del movimento riescono eguali, quando sieno divise per lo tempo, siccome lo sperimento ci dà eguali le profondità delle fosse.

L. Io non dubito, che in questo, ed altri casi ancora la cosa non vada secondo il vostro bisogno; dubito, se in tutti i casi ella succeda egualmente. Esaminiamolo. Per voi bisognerebbe, che si verificasse la seguente analogia $rnt : RNT :: mu : MV :: \frac{m\sqrt{rn}}{\sqrt{m}} : \frac{M\sqrt{RN}}{\sqrt{M}}$, surrogando la proporzione delle velocità; dunque bisognerebbe, che fusse $t : T :: \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{rn}} : \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{RN}}$. Se i tempi costantemente avessero così fatta proporzione, che è l' inversa delle velocità, voi avreste universalmente accordate le partite. Ma per noi si è dimostrato, essere la vera propor-

proporzione de' tempi $t : T :: \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$, la qual non può convenir colla vostra, quando non sia $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{rn}} : \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{RN}} :: \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$, cioè a dire $\frac{1}{\sqrt{n}} : \frac{1}{\sqrt{N}} :: \sqrt{n} : \sqrt{N}$, ovvero $n = N$. Dunque i tempi assunti da' Signori Newtoniani non sono i giusti, se non se quando eguali sono le profondità delle fosse scavate; e perchè tali sono nell'esperimento del Poleni, però ad esso si dà una qualche spiegazione, che non va male.

C. Facilmente m'avveggo, che a que' casi, in cui val la risposta, che stabilisce i tempi, come le velocità, non si adatta l'altra, che stabilisce i tempi in ragion reciproca delle velocità; e che molti casi non saranno ne dall'una, ne dall'altra spiegati.

L. Non devesi però negare un vantaggio alla risposta de' Newtoniani sopra quella de' Cartesiani, cioè, che i casi, che convincono questa, sono di sperienza più esatta, e facile; perciocchè tutti quelli, ove si ottengono fosse eguali, ne dimostran la falsità. La dove è più difficile una sicura sperienza per convincere i Newtoniani, essendo pur di mestieri, che in essa riescano ineguali le fosse; onde non possiamo sapere l'esatta proporzion tra gli effetti. Con tutto ciò non lascia la risposta loro d'esser egualmente falsa, giacchè opponesi chiaramente alle cose per noi dimostrate ne' dì passati.

N. Con questa riflessione vi sottraete dal peso di ridurre in qualche caso particolare la cosa all'assurdo, siccome colla sperienza del Poleni avete dietro la scorta del Co: Riccati fatto della risposta de' Cartesiani. L'ipotesi dunque, che i tempi del far le fosse sieno in ragion non diretta, ma reciproca delle velocità, non è poi così irragionevole, onde si debba parlar con disprezzo degli autori, che l'hanno prodotta.

L. Comunque l'una, e l'altra risposta io la reputi falsa; pure ho somma venerazione per gli autori, che l'hanno sostenuta: ne l'aver essi errato una volta, o due, cosa comune a tutti quanti gli uomini, dee ne pur in minima parte scemar il credito, che colla scienza, e ritrovati nuovi sonosi acquistati nel mondo letterario. Contuttociò non mi stringete; perchè potrebbe essere, che mi riuscisse, per mezzo dello sperimento

del

del Sig. Camus, di condurre la vostra risposta all' assurdo così bene, come ha fatto il Co: Riccati quella de' Cartesiani.

N. Sembrami, che messo alle strette voi v' impegniate a cosa, dove paura abbiate di non riuscire.

L. Per ogni modo bisogna far pruova, giacchè me ne obbligate. La sperienza del Sig. Camus ci dà, che un mobile gravissimo, urtando contro ad una sfera di piombo ferma con una velocità, che acquistato abbia, cadendo dall' altezza $= m A$, fa quella contusion, che farebbe se urtasse successivamente m volte con una velocità, che si acquista, cadendo dall' altezza $= A$. E per farmi strada, io so, che la resistenza della palla di piombo ad essere ammaccata, si accresce a misura, che si fa maggiore la contusione; comunque non se ne sappia la vera proporzione: contuttociò non credo, che avrete difficoltà a concedermi, che lo stesso per l' appunto accaderebbe, se la resistenza si mantenesse costante.

N. Ve lo accordo ben volentieri.

L. Se così è, l' assurdo nasce così patente, che nulla dimostrazione può riuscir più facile, e chiara. (*Fig.* 2.) Cada il corpo dall' altezza $BC = m A$, e produca la fossa, o contusione CL; indi lo stesso corpo urtando m volte colla velocità acquistata per la caduta $DE = A$, produca successivamente le fosse EM, MN, NO, OP, PQ, le quali, secondo lo sperimento, prese insieme, saranno eguali a CL. E' chiaro, che supposta la resistenza costante le fosse EM, MN, NO ec., tutte saranno eguali, e formate in tempi eguali; perchè essendo eguali le resistenze, eguali le velocità iniziali, non vi può essere cagione alcuna d' inegualità. Si divida CL in tante parti, in quante è divisa EQ. Io dico, che al principio dell' ultima parte, cioè al punto I, avrà il mobile la velocità, che si acquista dalla caduta per $DE = A$, e che la fossa IL si compie nello stesso tempo, in cui ciascuna delle fosse EM, MN ec.

N. Questo è da concedersi per necessità; perchè se maggior fosse la velocità in I della velocità in E, la fossa IL dovrebbe, supposte eguali le resistenze, riuscir maggior della EM, e se quella fosse minore, sarebbe pur minore la fossa IL. Che se eguali sono le velocità iniziali, è necessario per parità di ragione, che eguali sieno i tempi, in cui le due fosse sono formate.

L. Dun-

L. Dunque il tempo per IL eguaglia il tempo per EM; ma il tempo per CL, è maggiore del tempo per IL; dunque anche maggiore del tempo per EM: ma la velocità in C è maggiore della velocità in E; dunque il tempo per CL al tempo per EM, non può eſsere in ragion reciproca delle velocità in C, E, con che s' incominciano a ſcavar le foſse. Come ſi dovea dimoſtrare.

N. Veramente non mi ſarei mai creduto, che i Leibniziani aveſſero ragioni sì forti da abbattere le riſpoſte, di cui ſonoſi ſin ad ora ſerviti i Newtoniani; e veggio, che non biſogna pronunciar ſentenza prima d' aver diſcuſſi poſatamente, e profondamente diſaminati i momenti dell' una ſentenza, e dell' altra; perchè leggendo gl' Ingleſi avrei giurato, che la verità era dalla parte loro; tanta è la confidenza, con che parlano, e di tanta apparenza ſon le ragioni, che recano. Ma per decidere della dilicatezza del ſuono fa di meſtieri aſcoltare l' una, e l' altra campana.

C. A dir vero, così fatte rifleſſioni ſon convincenti; onde dopo ciò non ſaprei a che ricorrere, ſe non gettandomi in braccio all' opinione del Sig. Martini, il quale penſando, che i tempi avvalorino l' azione de' corpi ſcavanti le foſſe, giudica, che nella conſiderazion degli effetti ſiaſi omeſſo l' elemento della maſſa, il qual ſi debba conſiderare. Però ſecondo lui la forza viva moltiplicata nel tempo è coſtantemente proporzionale alle reſiſtenze, alle profondità delle foſſe, ed alle maſſe de' corpi, che le ſcavano, cioè $mut : MVT :: rnm : RNM$.

L. Paſſiamo per buono queſto elemento delle maſſe, ch' egli niente a propoſito v' introduce; giacchè or ora ne parleremo. Intanto facciamo vedere, che i tempi, di cui egli ha biſogno, generalmente non ſono i veri. Perciocchè dalla voſtra analogia ne ſeguita $t : T :: \frac{rn}{u} : \frac{RN}{V}$; ovvero introdotta la proporzion della velocità già trovata $t : T :: \frac{rn\sqrt{m}}{\sqrt{rn}} : \frac{RN\sqrt{M}}{\sqrt{RN}} :: \sqrt{rnm} : \sqrt{RNM}$; la qual proporzione de' tempi non può verificarſi, ſe non nel caſo, che ſia $\sqrt{rnm} : \sqrt{RNM} :: \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}} : \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}}$; ov-

vero

vero $\sqrt{r} : \sqrt{R} : : \frac{1}{\sqrt{r}} : \frac{1}{\sqrt{R}}$; ovvero $R = r$. Dunque introdotto ancor nell' effetto l' elemento della maſſa, le partite non ſi accomodano, ſe non in un caſo particolare, quando cioè eguali ſieno le reſiſtenze.

N. Da qualunque parte ci volgiam, Sig. Ceſare, queſti benedetti tempi non poſſono render le partite eſatte. Se le reſiſtenze ſono, come le maſſe, biſogna, che i tempi le azioni rendano più gagliarde; ſe le profondità delle foſſe rieſcano eguali, fa di meſtieri, che diano alle reazioni vigore. Ma qual ſapienza deve inſegnar al tempo, che è neceſſario, che avvalori ora l'azione, ora la reazione. Ma ſe ne l'una, ne l'altra circoſtanza abb a luogo, non ſi ſa in qual guiſa applicarlo: onde biſogna aſſolutamente dire, che la conſiderazione del tempo non abbia a far nulla colle forze vive. Quanto poi alla ſentenza particolare del Sig. Martini, quando anche accomodaſſe eſattamente le partite, non ſi vuol ammettere per niun modo; perciocchè la maſſa del corpo ſcavante la foſſa, non ſi dee computare nella conſiderazion dell'effetto.

L. La coſa è chiariſſima. Fingete, che la materia cedente, in cui ſcavar ſi deve la foſſa, ſia diviſa in più ſtrati: conſiderate il primo di queſti ſtrati; le ſue parti hanno tra loro un certo legamento, il quale reſiſte alla ſeparazione delle medeſime. Così fatto legamento, e la reſiſtenza, che da lui naſce, non dipende ne punto, ne poco da un corpo eſtrinſeco; onde debba reagire con più d'energia contro ad una palla più denſa, che contro ad una più rara d'egual diametro: ma ſolo deeſi aver conſiderazione all'energia di che è dotata, e al più al tempo, in cui va cedendo. Ne v'ha alcuno, che avviſar poſſa la materia cedente, che accreſca, o che rallenti l' energia della tenacità, perchè vien ad urtarla or un corpo più peſante, ed ora un più leggiero.

N. Sembrami, che quando ſi voglia introdurre nell'effetto la conſiderazion della maſſa, altro non ſi faccia, che traſcurarla nella miſura della forza. Concioſſiachè, per avviſo del Sig. Martini, deve eſſere rnm proporzionale a mut; dunque dividendo per m, ſarà rn, come ut; e per conſeguenza la reſiſtenza, e la profondità della foſſa proporzionale alla veloci-

S tà,

tà, e al tempo, in cui si forma. Dunque nella misura della cagione non entra per alcun modo la massa, ma sol la velocità, la quale viene avvalorata dal tempo, in cui la fossa resta scavata.

C. Quante opinioni, e quanto differenti si sono da sottilissimi ingegni con fatica ritrovate, le quali una più universale teoria risolve in fumo, e disperde per l'aria! Come mai è suggetto l'ingegno umano a veder perire i suoi più studiati pensieri: cosa, che dovrebbe avvilirlo, non che frenarlo.

N. Questa è una sventura di chiunque ricerca una risposta, od una spiegazione, la quale dee accomodarsi a molti fenomeni, col tener l'occhio fisso ad un solo; spiegato il quale, agevolmente si persuade, che sieno con pari facilità spiegati tutti gli altri. Nella nostra materia, chi ha rivolto l'occhio a' soli corpi gravi, chi unicamente allo sperimento del Poleni. La fortuna ha però fatto, che quella risposta, la quale a quel caso particolare in qualche maniera s'accomoda, regger non possa, cangiate le circostanze. Così per lo più accade a tutti i fabbricatori delle ipotesi, i quali immaginando secondo il capriccio del loro fervido ingegno una qualche causa ideale per soddisfare ad un fenomeno, che hanno innanzi alla mente, sono di poi costretti ad alterarla, a cangiarla, a riformarla per ispiegare altri fenomeni, a cui si va di mano in mano pensando.

C. Siete voi cotanto nemico dell'ipotesi, che ne abborriate per fino il nome? Io per me giudico, che sia desiderabile una certa, e sicura scienza delle cose: ma siccome questa non si può in ogni materia ottenere, così fa di mestieri di contentarsi di qualche probabile ipotesi; perchè meglio è avere qualche probabile spiegazione, che esserne privo. E di fatto non è avvenuto più volte, che un'ipotesi probabile a poco a poco collo studio, e colla sperienza si è portata ad esser tesi certissima? Quando il dottissimo Torricelli s'avvide, che fatto il vacuo, il mercurio rimaneva nel cannello sospeso all'altezza di ventisette pollici in circa, non pensò egli ad una ipotesi, e probabilmente non giudicò provenir dall'aria, la quale fosse dotata di gravità? Questa, che in prima era ipotesi, collo studio, e colle replicate sperienze dello stesso Torricelli, del Roberval, del Pascal, e degli Accademici del cimento a poco

a poco divenne tesi, ne v' ha cosa in fisica, ch' abbia più certezza di questa.

N. Due generi d' ipotesi, se così chiamar le vogliamo, fa di mestieri distinguere. Il primo niun corpo suppone, che certamente non sia in natura; ma solo sospetta essere cotal corpo d' una tal proprietà dotato, per cui riceva un fenomeno sufficientissima spiegazione. Se si ha fondata speranza, che o col discorso, o colla sperienza si possa dimostrare esser sì, o nò nel corpo la proprietà, di che si sospetta; si potrà modestamente il suo pensiero al mondo letterario proporre; acciocchè una qualche dotta, e diligente persona, col pensarvi sopra, o la verità ne discuopra, o la falsità. Cotali ipotesi, le quali io più volentieri amo di chiamar conghietture, sono utilissime, e semi di molte importanti scoperte: e quantunque la maggior parte sia stata in progresso convinta di falsità; pure parecchie sono state ritrovate verissime; siccome è accaduto alla conghiettura del Torricelli, che la sospension del mercurio, dopo fatto il vacuo, attribuir si debba, siccome a cagione, alla gravità dell' aria.

Il secondo genere d' ipotesi o suppone specie di corpi, di cui si può dubitare, se siano in natura, o tali qualità v' introduce, di cui si vede chiaro, che mancano i dati per certificarcene. Ora il fabbricare di così fatte ipotesi, la reputo cosa del tutto inutile, ed infruttuosa. Perchè non avendo noi speranza veruna di potercene assicurare, ci condanniamo a vivere in una perpetua incertezza; e consumiamo gli studj, co' quali parecchie verità forse ci riuscirebbe di discuoprire, in accozzar insieme sognate cagioni, che ci lasciano nella primiera ignoranza. Quindi avvien di continuo, che così fatte ipotesi non abbiano mai stabilità, e fermezza, ma sieno in un giro, ed in una mutazione, che non ha fine. Si fabbrica una ipotesi, che si giudica ottima a soddisfare a qualsivoglia fenomeno; si scuopre un novello fenomeno, o nasce una difficoltà insuperabile; l' ipotesi non si lascia, ma si riforma, o piuttosto una nuova se ne crea: e così sempre mai veggonsi così fatte ipotesi mutate, alterate, riformate per modo, che tra quella, che regna al presente, e la prima invenzione fa di mestieri aguzzar ben l' occhio per ravvisarne una picciola somiglianza.

Osservate quel, che è avvenuto all' ipotesi, con cui si è supposto di ritrovare la vera cagione della gravità. Si è conside-

fiderato in prima, che ogni corpo terreftre è dotato d'una forza, da cui viene fpinto all'ingiù proffimamente verfo il centro della terra. Ad ifpiegare cotal fenomeno, fi è immaginata una fpecie di materia, cui fi è dato il nome di eterea, o di fottile, la quale riempia tutto lo fpazio, ne lafci vacuo veruno. Quefta, fi è penfato prima, che premendo in giù il corpo, gli dia cotal forza al centro della terra diretta. Ma fatte fi fono due rifleffioni; la prima, che quella ftessa difficoltà, che fi ha per concepire, onde il corpo fia grave, fi avrà ad intendere, perchè fia grave la materia fottile; la feconda, che non effendo per fe medefimi gravi i corpi, ma fol la materia fottile, fi dovrà anzi dire, che, difcendendo quefta, porti in alto i corpi in quella guifa, che l'acqua porta in fu un legno men grave in ifpecie di lei. Quindi fi è penfato a riformare l'ipotefi, e fi è detto, che la materia fottile accompagna la terra, che muovefi col moto diurno; io non parlo di mio fenfo, ma folo efpongo le fentenze da altri fcrittori abbracciate. Laonde fi dee intendere la materia fottile dotata di forza centrifuga, che non può nel moto curvilineo mancare. Proccurando dunque la materia fottile d'allontanarfi dal centro, manda verfo il globo terracqueo i corpi, che ne fon diftaccati. Ma tutti i pori de' corpi o fon riempiuti di materia fottile, o no. Se fon riempiuti di materia fottile, tanta farà la forza centrifuga ne' corpi, quanta nella materia fottile, e però una non potrà vincere, e fuperar l'altra. Che fe il corpo ammettefse mai qualche vacuo non ripieno di fottile materia, il qual penfiero fembra contrariare all'ipotefi, vero farebbe, che efsendo maggior la forza centrifuga della materia eterea, che non de' corpi, dovrebbero quefti portarfi a bafso. Ma fi ofservi, che i corpi più rari, e però di minor forza centrifuga dotati, avrebbero a fcendere più velocemente, e ftar di fotto a' corpi più denfi, la qual confeguenza alla fperienza è contraria. L'ipotefi non oftante non fi abbandona, ma fi riforma; e vedendo, che non fi può ne' corpi ottenere una minor forza centrifuga, che falvi i fenomeni, per mezzo della rarità, fi proccura d'ottenerla per mezzo della minore velocità. S'immagina adunque, che la materia eterea giri fedici, o diecifette volte più velocemente, che non i corpi terreftri. Quindi avendo maggior forza centri-

trifuga quella di questi, è necessario, che questi cedano, e si portino abbasso. L'ipotesi par migliorata, ma non lo è, perchè girando la materia eterea intorno all'asse terrestre, la direzione della sua forza centrifuga non è dal centro della terra alla circonferenza, ma dal centro del circolo parallelo; onde a cotal centro del circolo parallelo dovrebbero dirigersi i corpi gravi. Quindi il dottissimo Signor Cristiano Ugenio a rimediare a così fatto sconcerto vuole, ed avvisa, che la materia eterea giri, e si rivolga per tutti i circoli massimi della sfera; da quai diversi, e varj moti sia costretto il corpo a portarsi al centro terrestre. Il Sig. Bulfingero, opponendo, acconciamente riflette, che l'ipotesi del Cartesio comincia bene, perchè il moto, ch'egli immagina è possibile, ma finisce male, perchè conduce i corpi al centro de' circoli paralleli; all'opposito, l'ipotesi dell'Ugenio termina bene, perchè porta i corpi al centro terrestre, ma da un non buono cominciamento, perchè impossibile cosa è, che la materia sottile si aggiri in effetto per tutti i circoli massimi, che passano per un punto, nè movimenti così diversi, ed in parte opposti non s'impediscano. Onde egli di nuovo riformando l'ipotesi è di sentimento, che la materia sottile muovasi intorno a due assi, l'uno de' quali è l'asse terrestre, l'altro un diametro dell'equatore. Aggirandosi con questi due movimenti, o piuttosto con un moto composito di questi due avverrà, che sieno spinti i corpi, non al centro del circolo parallelo, ma al centro terrestre. Sopra di ciò versando il dottissimo P. Boskovik, ha geometricamente dimostrato, che la curva descritta per questi due movimenti da ciascun punto della materia sottile, non è un circolo massimo della sfera, ma una curva di doppia curvatura, la cui projezione in un circolo massimo della sfera, si ritrova essere una curva del sesto grado. Laonde non è possibile, ne pur per questi due movimenti, di far sì, che i corpi si portino al centro terrestre. Non vedete quante mutazioni in una ipotesi siensi fatte; e pure dopo tanti studj la cosa è ancora all'oscuro, ne si è ritrovata ipotesi, che a tutti i fenomeni soddisfaccia. Non è meglio confessare ingenuamente di non saper la cagion della gravità, che di aggirarsi con lungo studio, e fatica per tante immaginazioni, le quali una riflession nuova, o un nuovo fenomeno gitta a terra.

C. Voi

C. Voi ſapete quello, che è andato come in proverbio, che la verità non ritrovaſi, ſe non paſſando per tutta la ſerie degli errori; col qual detto non altro intendeſi di affermare, che per lo più il primo diſcopritore della verità non ottiene l'eſatto, ma ſi contenta del proſſimo. Dopo così fatta invenzione altri raffinando gli ſtudj altrui, ritrova un proſſimo, che molto più ſi accoſta all'eſatto; e così ſi va guadagnando terreno, e vie più la teoria perfezionando. Qual maraviglia però, ſe lo ſteſſo accade all'ipoteſi ancora. La prima, che ſi produce, è rozza, e di pochiſſimi fenomeni è valevole di dare la ſpiegazione, ma riformata molti più fenomeni abbraccia; e così con nuove, e replicate riforme, ſi va ſempre conducendo a ſtato migliore. Per la qual coſa non manca una fondata ſperanza di renderla a poco a poco tanto perfetta, onde non v'abbia fenomeno, il quale non reſti per lei ſpiegato compiutamente.

N. Quando, ſtudiando la natura, conſiderandone con occhio attento i fenomeni, e ricavando da eſſi quelle conſeguenze, che ne diſcendono con evidenza, e niente di più, ſi fa ogni sforzo per mettere in chiaro la verità, egli è fuor di dubbio, che non ſempre ſi ottiene l'eſatto, ma che ſovente del proſſimo fa di meſtiero appagarſi. Contuttociò l'eſatto ſi dà per eſatto, il proſſimo per proſſimo; onde non ſi corre pericolo giammai di rimanere ingannato. E l'avvicinarſi collo ſtudio vie più all'eſatto, rende bensì più eſatta la teoria, e più preciſe le noſtre cognizioni, ma non già più vere; perchè tanto era vero, che noi ci eravamo in prima accoſtati alla verità, quanto è vero, che col nuovo ſtudio le ci ſiamo avvicinati vie maggiormente.

Non così accade all'ipoteſi; perciocchè quantunque ſia vero, che un'ipoteſi a moltiſſimi fenomeni ſoddisfaccia; pure non poſſiamo mai eſſer certi, che ſoddisfaccia a tutti; e ſebbene non abbiam preſente agli occhi fenomeno, che da eſſa non reſti ſufficientemente ſpiegato; pure dobbiam ſempre vivere con timore, che all'improvviſo collo ſtudio non ſi ritrovi un fenomeno tale, da cui rimanga l'ipoteſi convinta di falſità: coſa la quale non di rado è avvenuta.

Ma concediamo, Signore, che l'ipoteſi a tutti quanti i fenomeni ſoddisfaccia, e che niun pericolo abbiavi di diſcopri-

prire fenomeno alcuno, che la distrugga; pensate voi, che fatto avranno le cognizioni nostre un notabile avanzamento? Nò certamente. Perciocchè la probabilità d'aver ritrovata la verità sarà affatto nulla.

C. E non chiamerete voi probabile, anzi moltissimo probabile un' ipotesi, la quale dia sufficientissima spiegazione a tutti i fenomeni.

N. A dichiarare il mio pensiero, lo m' immagino d' essere in mezzo al mare dentro una nave A, e veggio di lontano venire un' altra nave B, ed osservo, che una s' accosta all' altra con un grado di velocità. Supponete, ch' io sappia di certo, non potersi le navi partire da quella linea retta, che le congiunge. In questa supposizione, in quattro maniere può accadere la cosa; o che la nave A stia ferma muovendosi con un grado di velocità verso di lei la nave B; o che stia ferma la nave B, e che si muova la nave A; o che l'una, e l' altra si vengano incontro per modo, che la somma delle due velocità $= 1$; o che l' una corra dietro all' altra per guisa, che la differenza delle due velocità $= 1$, essendo maggiore la velocità della nave, che segue.

Ciò posto; se formerò un' ipotesi, e dirò; una nave s' accosta all' altra colla velocità $= 1$, perchè una corre dietro all' altra in maniera, che la differenza delle velocità $= 1$; la probabilità d' aver ottenuta la verità alla probabilità di non averla ottenuta in qual proporzione starà?

C. Essendo in questa ipotesi quattro i casi, se suppongansi egualmente facili ad avvenire, le probabilità saranno come $1 : 3$.

N. Sicchè molto minore sarà la probabilità, che io abbia ottenuta la verità della probabilità opposta. Passo innanzi, e non contento d' aver fissato un modo generale, specifico maggiormente l' ipotesi, e dico; la nave B muovesi colla velocità $= 4$, e la nave A le tien dietro colla velocità $= 5$; questa è la cagione, perchè una si avvicina all' altra colla velocità $= 1$. Fatta cotale ipotesi, io vi domando la proporzione, che passa tra le probabilità, ch' io abbia ottenuta, e che non abbia ottenuta la verità.

C. Essendo infinite le velocità assolute, di cui esser possono dotate le due navi, salva la stessa velocità relativa, ne segue

ſegue, che tra gli infiniti caſi, che danno la ſteſſa celerità relativa, il voſtro ne è uno. Laonde la probabilità, che abbiate ottenuta la verità alla probabilità, che non l'abbiate ottenuta, è come l'unità all'infinito, cioè a dire nulla.

N. Si diminuirebbe ancora vie più all'infinito, ſe oltre le infinite velocità ſi conſideraſſero le infinite direzioni, per cui le due navi poſſon viaggiare.

Ma venghiamo al caſo noſtro. La natura può ottenere uno, o più determinati fenomeni in infinite maniere. Quando anche il corto intelletto umano abbia la buona ſorte d'incontrare una di queſte maniere, qual probabilità avrà d'aver incontrata quella, di cui ſerveſi la natura? Non vedete, che la probabilità d'averla incontrata alla probabilità oppoſita, ſarà come l'unità all'infinito. Dunque non è aſſolutamente probabile, che voi abbiate colle voſtre ſpeculazioni incontrato il vero modo d'operare della natura. Non ho avuta dunque ragione di dire, che la probabilità di ottener la verità per l'ipoteſi è affatto nulla? Laſciando per tanto cotal metodo, che per tanti capi è mancante, atteniamoci a quello di ſeguitar la natura, ed i ſuoi fenomeni, e ricavando quelle conſeguenze, che naturalmente derivano, ſtudiamoci di avanzar le noſtre cognizioni, e di dar lenti, ma ſicuri accreſcimenti alle noſtre teorie. Io ſo, che, di queſto metodo uſando, meno coſe aſſai inſegneremo, e minore ſtima appreſſo il vulgo acquiſteremo di letterati. Ma ſovvengaci del peſato detto dell'acutiſſimo Galileo; *La fiſica quanto ſarà più perfetta, tanto manco verità inſegnerà.*

L. Tronchiſi omai queſta per altro non inutile digreſſione, nella quale ſe o l'una parte, o l'altra ſeguir doveſſi, non mi dilungherei certamente dai ſentimenti del Sig. Neſtore; perchè non ho mai veduto, che colle ipoteſi ſiaſi avanzata la fiſica. Contuttociò aggiungerò brevemente una rifleſſione, la quale riſchiarerà con nuova luce le coſe, che ultimamente ſi ſono dette. Allorchè io mi ſono immaginata una cauſa, per la quale veggio rimaner ogni fenomeno ſufficientemente ſpiegato, non mi ſarà lecito di paſſar dall'ipoteſi alla teſi, e d'affermare eſſer quella de' fenomeni la cagione, ſe non quando al ſuggetto, di che ſi tratta, applicar ſi poſsa il metodo d'eſcluſione. Concioſſiachè ſe mi veniſſe fatto d'eſcludere tutte l'altre

ca-

cagioni, dimoſtrando, che non ſoddisfanno ai fenomeni, io potrei legittimamente dedurre, che da quell' unica, la quale eſcluſa non viene, dipendono tutti i fenomeni, che mi ſi fanno innanzi agli occhi. Mi ſpiegherò con un eſempio. S' io conſidero tutte le apparenze, ſotto alle quali mi compariſce Saturno, ed inſieme m' immagino, che queſto pianeta ſia un corpo proſſimamente sferico circondato da un anel ſolido, il quale ſia dal nucleo sferico diſtaccato del tutto, io veggio con chiarezza, che quelle apparenze debbono neceſſariamente ſeguire. Fin ora io non poſso affermare con probabilità, tale eſſer la figura del pianeta ſaturno. Ma perciocchè riducendo a claſſi tutte l' altre figure, io chiaramente ſcuopro, e dimoſtro, che non ve n' ha alcuna, la quale a tutte l' apparenze accomodare ſi poſsa, l' altre figure tutte eſcludendo, debbo non ſol con probabilità, ma eziandio con certezza pronunziare, eſser il pianeta ſaturno circondato da un anel ſolido dal rimanente del corpo ſuo diſtaccato. Ecco che l' ipoteſi non è priva d' utilità in una materia, la quale riceve il metodo d' eſcluſione. Ma dove così fatto metodo non ha luogo, qual' utilità ſi potrà dall' ipoteſi ricavare? Io ſo, che ſe v' abbia un numero determinato di cauſe, quante più io ne poſso eſcludere, di tanto maggiore probabilità ciaſcuna di quelle, ch' eſcluſe non ſi ſono, vien corredata. Ma che gioverà l' eſcluderne cinque, o ſei, dove infinite immaginar ſe ne poſsono. L' ipoteſi, immaginata non ſarà ella d' ogni probabilità interamente sfornita? E tali ſono l' ipoteſi, onde ſi vuole aſsegnar la cauſa della gravità, dell' elaſticità, ed altre ſimili, le quali ingombrano tutto dì i libri, e ſtancano le menti di parecchi filoſofanti.

Ma ritornando là, d' onde ſiamo partiti, diamo fine a queſta giornata col leggere uno ſquarcio della diſertazione del Signor Giovanni Bernoulli, che ha per titolo *Della vera nozione delle forze vive;* dalla qual diſertazione ho preſi i due argomenti, di cui in primo luogo mi ſon ſervito in queſta giornata.

Tutti quelli, dice il Bernoulli, *i quali, dal non aver inteſa la vera natura delle forze vive, la teoria ne rigettano, in queſto unicamente ſi appoggiano, che nella miſura di queſte forze non ſi mette in computo il tempo da coloro, i quali per gli effetti omogenei avviſano doverſi portar giudicio della quantità delle for-*

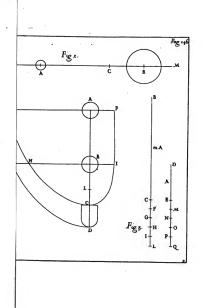
ze. Ma cosa sconcia si è il portar giudicio della quantità d' una qualche cosa ora per se esistente in altra maniera, che per mezzo d' una determinata misura, la quale presa alquante volte esaurisce il tutto: ne importa il sapere quanto tempo duri il misurare, ne qual misura si adopri maggiore, o minore. Basta che dalle parti note prese tutte insieme raccoglier si possa il tutto, che è ignoto.

Fingi, per servirmi d' una acconcia similitudine, che si tratti d' investigar la capacità d' un vaso pieno d' acqua. Dirai, e bene, che si dee misurare la quantità dell' acqua contenuta nel vaso per mezzo d' una certa, e determinata misura. Che se un altro ti obbiettasse, che si deve prima conoscere in quanto tempo il canale, che porta l' acqua, abbia il vase riempiuto, o di quanta ampiezza sia il foro, per lo quale, chiuso il canale, si scarica, ed esce l' acqua; o se ti mettesse innanzi altra simile circostanza, che non fa al caso, ti burleresti per certo di così fatta obbiezione degna di riso. Conciossiachè non trattasi del modo, onde fu empito il vaso, se presto ciò sia avvenuto per un canale più ampio, o tardi per un più angusto: ovvero se per un foro di gran diametro esca l' acqua prontamente, o a stilla a stilla per un foro strettissimo. Chiudi il canale, ed avvi nel vase una determinata copia d' acqua. Fa di misurar questa, se con prontezza, o con lentezza ciò non importa; ritroverai sempre la medesima quantità d' acqua. La maniera d' empiere il vaso rappresenta il modo, onde si genera la forza viva in un corpo: la maniera di vuotar il vase, il modo qualunque siasi di trasferire la forza viva da un corpo in altri eguali tra se, e che ricevano la stessa velocità, di trasferirla, dico, come ad eguali misure, dal cui numero giudicar si possa della quantità del tutto. Fin qui il Bernoulli. E con ciò diamo fine a' ragionamenti di questo giorno.

N. Non credo, che possiamo partir contenti Avete bensì confutate le risposte, che sogliono usarsi all' argomento leibniziano. Ma intorno a questo argomento ci avete lasciati fin or sospesi. Diteci prima qual è il vostro giudicio, e poi ce ne anderem soddisfatti.

L. Venite domani, ed i miei sentimenti a lungo vi spiegherò, dopo aver alcuna cosa della gravità ragionato.

GIOR.

Pag. 246
Fig. 1.
A
C
B
M
A
F
B
H
I
L
C
D
B
mA
D
A
C
E
F
M
G
N
Fig. 3.
H
O
I
P
L
Q

GIORNATA QUINTA.

INTERLOCUTORI

Lelio, Nestore, Cesare.

L. INcominciamo la presente giornata coll' entrare in una materia, nella quale sebbene tutte le cose sono simili a quelle, che abbiamo ne' dì passati considerate, pure, perciocchè somministra a' Signori Cartesiani i principali argomenti, e sveglia in essi una total confidenza della lor causa, merita d' esser particolarmente esaminata, e discussa.

C. Così è; le leggi del movimento, che nasce dalla gravità sono d' una forte apparenza in favore della vulgare sentenza Perciocchè non è egli vero, che le velocità son, come i tempi? dunque ad ogni tempicello eguale corrisponde un grado eguale di velocità. Qual cosa adunque può essere più simile al vero di questa, che ad ogni tempicello eguale corrisponda un nuovo impulso della gravità, o piuttosto un eguale azione producente sempre lo stesso grado di velocità; dalla qual dottrina ne nasce, che il numero degli impulsi, ovver l' azione finita sia in proporzione de' tempi, e per conseguenza delle velocità; e però in questa proporzione sia ancora la forza viva trasfusa nel corpo.

L. Aggiungete di più, che tutti quelli, che hanno scritto de' gravi cadenti o espressamente dicono, o tacitamente suppongono, che il numero degli impulsi comunicati dalla gravità al corpo, o sia la quantità dell' azione, segua la proporzione de' tempi. Io ne recherò in pruova una dimostrazione del P. Ruggero Boskovik, la quale quantunque non preceda la nostra controversia; pure apertamente s' appoggia in così fatta supposizione. Eccola quì nella disertazion, che ha per titolo; *Del moto d' un corpo attratto ad un centro immobile da forze diminuentisi in ragion reciproca duplicata delle distanze in un mezzo non resistente*. Ella comincia al numero 2, e dice così =

Se una qualunque forza costante nel principio di tempicelli eguali agisca egualmente, e secondo una stessa direzione contro ad un corpo dotato della sola forza d' inerzia, le velocità in fi-

ne dei tempi continenti qualunque somma de' predetti tempicelli saranno, come gli stessi tempi, e gli spazj computati dal primo tempicello cresceranno secondo la serie de' numeri naturali 1, 2, 3 *ec.; d' onde con facilità deduconsi queste due verità; primo. Se dagli spazj, che vengono scorsi fino alla fine de' tempi continenti qualunque somma de' tempicelli eguali, si levi la metà dello spazio passato nell' ultimo tempicello, i residui saranno accuratamente, come i quadrati dei tempi, o come i quadrati delle velocità. Secondo. Se per tutto il tempo il corpo avuta avesse la velocità, che ha nel fine, avrebbe accuratamente scorso il doppio di quel residuo.*

Conciossiachè in questa figura (*Fig.* 1), *la cui costruzione dal sol vederla è palese, se i tempicelli eguali vengano espressi per le rette eguali* A 1A, 1A 2A, 2A 3A *ec., e gli spazj descritti vengano rappresentati dai rettangoli* 1 AE, 2A 2E, 3A 3E *ec.; chiara cosa è, che i due spazj in due qualunque tempi* A 3A, A 6A *passati saranno come le somme di que' rettangoli, ovvero come l' aje* A 3A 3B 3E 2E EA, A 6A 6B 5D 5E *ec.* EA. *Se da cotali aje si levino tutti i triangoli* ABE, B 2B 2E, 2B 3B 3E *ec., rimarranno i triangoli* A 3A 3B, A 6A 6B, *i quali saranno come i quadrati dei lati omologhi* A 3A, A 6A *esprimenti i tempi; ma que' triangoli eguagliano la metà dello spazio nell' ultimo tempicello eguale descritto, essendo la metà de' rettangoli* 1AE, G 2E, 2G 3E *ec.; ovvero de' rettangoli* 6A I, L 2K, 2I 3H *ec. La prima cosa dunque delle due proposte è palese.*

Colla velocità poi, che si ha nell' ultimo tempicello, passati si sarebbero ne' successivi tempicelli spazj eguali espressi per li rettangoli 1A D, 2A 1D, 3A 2D *ec., ed in conseguenza in tutto il tempo* A 6A *lo spazio espresso per* A 6A 6B D *doppio del triangolo* A 6A 6B, *il quale è l' eccesso dello spazio* A 6A 6B 5D 5E *ec.* EA *sopra la metà dell' ultimo spazietto* 6A 5D; *dunque è manifesta ancor la seconda cosa proposta.*

Quindi se que' tempicelli si concepiscano infinitamente piccioli, sarà equipollentemente la metà dello spazietto scorso nel primo tempicello allo spazio scorso in un tempo finito, come il quadrato del primo tempicello al quadrato dello stesso tempo finito: e colla velocità acquistata in fine dello stesso tempo, conservandosi essa in tutto il tempo costante, si passerebbe equipollentemente il dop-

doppio dello ſpazio paſſato dal mobile, con moto uniformemente accelerato. Concioſſiachè lo ſpazio ſcorſo nell' ultimo tempicello per riſpetto all' intero ſpazio paſſato diviene infiniteſimo, e ſicuramente ſi omette.

Dal progreſſo di così fatta dimoſtrazione è manifeſto, che dall' ipoteſi, che la gravità replichi i ſuoi impulſi ſecondo gli elementi del tempo, ſi deducono quelle ſteſſe verità, che i filoſofi evidentemente raccolte hanno dalla ſperienza.

C. Sono aſſai degni di ſcuſa i Carteſiani, ſe a conghietture sì forti ſonoſi arreſi; giacchè ſe queſte non ſono conghietture di nerbo, quali altre lo ſaran mai?

L. Credete voi, che ſervendomi dell' altra ipoteſi conforme alla teoria delle forze vive, che il numero degli impulſi ſegua la ragion degli ſpazj, io non poſſa ſimilmente dedurre le medeſime leggi, comechè il raziocinio rieſca alquanto più lungo?

C. Avrò piacer d' aſcoltarlo, perchè allora mi certificherò, che la conghiettura favoriſce non men l' una, che l' altra parte.

L. Io prendo nella linea A O (*Fig.* 2) quanti voi volete ſpazj eguali A 1A, 1A 2A; 2A 3A ec., indi meno a qualunque angolo la retta AP, a cui conduco le ordinate 1A B, 2A 2B, 3A 3B ec. Se pongaſi, che il mobile ad ogni punto A, 1A, 2A ec. dopo cioè avere paſſati eguali ſpazietti riceva un novello impulſo dalla gravità, riceverà ancora in que' punti un eguale grado di forza; dunque ſe 1A B eſprime la forza ricevuta nel punto A, di che è dotato camminando lo ſpazio A 1A, F 2B eſprimerà la forza ricevuta al punto 1A, 2F 3B la ricevuta nel punto 2A, e così di mano in mano. Quindi raccoglieſi, che in qualunque punto, per eſempio, 5A prima del novello impulſo della gravità, ſi troverà avere il corpo la forza eſpreſſa per la linea 5A 5B.

Ma perchè le forze ſono in ragion duplicata delle velocità, col vertice A ſi deſcriva la parabola AQ, e ſi menino dagli ſteſſi punti le ordinate 1A C, 2A 2C, 3A 3C ec.; dunque ſe C 1A eſprime la velocità per A 1A, 2C 2A eſprimerà quella per 1A 2A, e 3C 3A quella per 2A 3A ec.

Per ritrovare i tempi, onde queſti medeſimi ſpazietti ſi ſcorrono, ſi deſcriva una novella curva 1DR, le cui ordinate

ſieno

ſieno ſempre in ragion reciproca dell' ordinate della parabola, ovvero in ragion reciproca dimidiata dell' abſciſſe; e però la curva ſarà un' iperbola del ſecondo ordine, in cui i quadrati dell' ordinate ſaranno in ragion reciproca delle abſciſſe. Menate dagli ſteſſi punti l' ordinate a queſt' iperbola, ſi conducano parallele all' abſciſſe le 1D D, 2D E, 3D 2E ec. Perciocchè il tempo, in cui ſi ſcorre qualunque ſpazietto 5A 6A è ſempre in ragion diretta del medeſimo ſpazietto, e reciproca della velocità 6A 6C, ovvero diretta dell' ordinata all' iperbola 6A 6D; dunque il tempo, in cui ſi ſcorre il detto ſpazio 5A 6A è come il rettangolo 6D 5A; la qual coſa eſſendo ſimilmente vera per rapporto a ciaſcuno degli ſpazietti, ne ſegue, che il tempo della caduta per qualunque ſpazio A 7A ſarà come la figura A 7A 7D 6E 6D 5E ec., la quale è formata dalla ſomma de' nominati rettangoli: e queſta io prenderò in avvenire, ſiccome miſura de' tempi.

Per avanzare cammino, fa di meſtieri ſupporre, che eſſendo A C (*Fig.* 3) la parabola Apolloniana, N D la noſtra iperbola, e condotte da qualunque punto D le due ordinate D M, D H, lo ſpazio infinitamente lungo N M D è eguale al rettangolo D A, e che amendue queſte ſuperficie, e per conſeguenza anche lo ſpazio da amendue compoſto, cioè N A H D N è come la corriſpondente ordinata alla parabola C H. Eſſendo l' equazion' alla iperbola $a^3 = z^2 s$ poſta $AH = s$, $DH = z$ prendendo le differenze, avremo $z^2 ds + 2szdz = 0$; dunque $zds = -2sdz$, cioè lo ſpazietto dH doppio di dM; dunque la ſomma di tutti i primi, cioè lo ſpazio N A H D, doppia della ſomma di tutti i ſecondi, cioè dello ſpazio N M D; dunque lo ſpazio N A H D è diviſo per metà dalla retta D M, che era la prima coſa da dimoſtrarſi.

Di più il rettangolo M D H è in ragion compoſita di A H, D H; ma D H è in ragion inverſa di C H; A H è in ragion duplicata di C H; dunque il rettangolo M D H in ragion duplicata diretta di C H, e reciproca di C H, cioè in ragion di C H, e per conſeguenza nella ſteſſa ragione è lo ſpazio duplo N A H D N; che era la ſeconda coſa da dimoſtrarſi.

Suppoſte così fatte verità geometriche, riprendiamo il filo de' noſtri ragionamenti, e rimettiamoci ſotto degli occhi la vecchia

chia figura (*Fig.* 2). Se al tempo della caduta per A 7A dinotato dalla ſomma de' piccioli rettangoli, cioè dall' aja A 7A 7D 6E ec., ſi aggiungano tutti i triangoli miſtilinei 6D 6E 7D, 5D 5E 6D, 4D 4E 5D ec. inſieme collo ſpazio infinitamente lungo ND 1D, avremo tutto lo ſpazio iperbolico N A 7A 7D, che ſi è dimoſtrato proporzionale all' ordinata della parabola 7C 7A, cioè alla velocità, con che ſi ſcorre lo ſpazietto 6A 7A; ma lo ſpazio infinitamente lungo N D 1D è eguale al rettangolo A 1D, cioè al tempo impiegato nello ſcorrere il primo ſpazietto A 1A; e tutti i triangoli miſtilinei 6D 6E 7D, 5D 5E 6D ec. preſi inſieme ſono minori della metà dello ſteſſo rettangolo A 1D, ovvero del primo tempicello; dunque ſe al tempo, in cui ſi ſcorre lo ſpazio A 7A, ſi aggiunga una quantità minore, che è $\frac{1}{2}$ del tempicello, in cui ſi paſſa il primo ſpazietto A 1A, ſi verrà ad avere una quantità proporzionale alla velocità.

Se adunque gli ſpazietti ſi prendano infinitamente piccioli, ma infiniti in numero, il tempo, onde ſi ſcorre il primo ſpazietto, verrà ad eſſere incomparabile col tempo intero, e per conſeguenza anche qualunque tempo minore di $\frac{1}{2}$ del tempicello primo; dunque queſta quantità ſi potrà traſcurare con ſicurezza, e però avremo i tempi in ragione delle velocità.

A determinare quale ſpazio ſi ſcorrerebbe coll' equabile velocità 7C 7A nel tempo iſteſſo, in cui con movimento accelerato nella maniera ſin ora conſiderata ſi ſcorre lo ſpazio A 7A, ſi produca la linea 7D 6E in S. Lo ſpazio iperbolico N A 7A 7D N è dupſo del rettangolo A 7D; dunque la figura compoſta di tutti i rettangoli, i quali dinotano i tempicelli, ſarà men che dupla del detto rettangolo A 7D, ed il difetto è minore di $\frac{1}{2}$ del rettangolo 1D A; ma il rettangolo A 7D è al rettangolo 6A 7D, come A 7A a 6A 7A; dunque il nominato ſpazio iperbolico NA 7A 7D N è al rettangolo 6A 7D, come il doppio di A 7A a 6A 7A; dunque la figura denotante il tempo è al rettangolo 6A 7D in minor ragione del doppio di A 7A a 6A 7A; ma 6A 7A è lo ſpazio paſſato colla velocità equabile 7A 7C nel tempo 6A 6D; dunque lo ſpazio ſcorſo colla ſteſſa veloci-

locità in tutto il tempo intero ſarà minore del doppio di A 7A.

Si avverta, che ſe dopo il primo ſpazietto A 1A ceſſaſſe d'agire la gravità, e il moto nello ſteſſo cominciare ſi convertiſſe in equabile, nello ſteſſo tempo non ſi paſſerebbe ſe non lo ſpazio A 1A; ma ſe non ceſſaſſe d'agire ſe non dopo gli ſpazj ſuſſeguenti, ſi ſcorrerebbe con moto equabile nello ſteſſo tempo uno ſpazio maggiore dello ſcorſo con moto accelerato per modo, che quanto è maggiore il numero degli ſpazietti accelerando paſſati, tanto più ſi va al doppio accoſtando, e doppio ſarebbe in effetto, ſe un infinito numero di ſpazietti ſi foſſero con moto accelerato traſcorſi.

Ma ſe prendanſi gli ſpazietti A 1A, 1A 2A ec. infiniteſimi di quantità, ed infiniti di numero, allora $\frac{3}{2}$ del tempo A 1D ſarà una quantità infiniteſima, e però da traſcurarſi, per riſpetto al tempo intero; onde queſto per adequazione verrà ad eſſere al tempo 6A 7D, come il doppio di A 7A a 6A 7A; e per conſeguenza, ſi paſſerà dal mobile nel tempo della caduta per A 7A uno ſpazio equipollentemente eguale al doppio dello ſpazio A 7A; come dimoſtrar ſi doveva.

C. Il progreſſo di tutta la dimoſtrazione è bello, ed ingegnoſo; ma ſembrami, che il primo dedotto dalle leggi de' Carteſiani per la brevità, ſpeditezza, e perchè altro non adopra, che linee rette, ſia più degno d'approvazione, e forſe di aſſenſo.

L. La natura, che ha una mente penetrantiſſima, e vede il tutto in un batter d'occhio, non ha biſogno, ſiccome noi, per rintracciare i ſegreti ſuoi, di far naſcere un'idea dopo dell'altra, e di dedur con iſtento da alcune poche coſe cognite, le molte incognite; e però non ad eſſa, ma a noi unicamente dà pena l'obbligo di condur con lunga ſerie, una coſa dall'altra.

C. Voi dite bene. Ma non poſſo laſciar il paragone delle due dimoſtrazioni, le quali mi ſon piacciute moltiſſimo. Io oſſervo, che la proporzione de' tempi colle velocità è accuratamente vera nella prima ſuppoſizione, e ſolo equipollentemente nella ſeconda; tutto all'oppoſito la proprietà, che gli ſpazj ſieno in ragion duplicata delle velocità è accuratamente vera nella ſeconda, equipollentemente nella prima ſuppoſizione; ed in

in amendue è ſol equipollentemente vero, che lo ſpazio ſcorſo con moto equabile è duplo dello ſpazio ſcorſo con moto accelerato, quando la velocità del moto equabile ſia quella, la quale ſi è ultimamente acquiſtata coll' accelerato; dalle quali coſe potrebbe forſe dedurſi un qualche criterio per iſtabilire, quale delle due ſentenze ſia vera.

L. Il criterio ſarebbe ottimo, quando inſtituir ſi poteſſe la ſperienza nelle quantità infiniteſime; ma a me, cui non da l' animo di aguzzar sì fattamente la viſta, che diſcuoprir poſſa, e miſurare tempi, ſpazj, e velocità infiniteſime, ſarà forza, che rieſca inutile l' accennato criterio. Laſcierò a voi il farne uſo, che forſe avete la viſta più dilicata, e ſquiſita. Ma laſciam le burle. A queſto paſſo mi caderebbe in acconcio di trattare una quiſtione di metodo, oſſervando quali ſarebbero le formule più ſpedite, e più facili nella poſizione leibniziana. Ma forſe devieremo per coſa di poco conto, ſe non in tutto almeno in parte, dal principale noſtro ſuggetto.

N. Noi, i quali ſiamo quì raunati per iſpendere il tempo con profitto, non ſiamo tenuti a così ſtretto rigor di metodo, che non poſſiamo alcun poco deviare per attendere ad altre coſe ancor diſparate, quando riuſcir debbano profittevoli.

L. Se così è. Io rifletto, eſſer principio metafiſico, che l' effetto dee ſempre eguagliare l' azione, che n' è la cauſa; e però tutte le minime azioni della gravità preſe inſieme, che altro non ſono ſecondo la ſentenza leibniziana, ſe non la gravità moltiplicata per lo ſpazio della caduta, devono eguagliare l' effetto, cioè la forza viva trasfuſa nel mobile. Per conſervar l' omogeneità de' termini aſſumendo l' unità, che chiamo $= a$, e denominando la gravità $= f$, lo ſpazio $= s$, la forza viva $= e$, ſarà $fs = ae$. E perchè coſa utile ſembrami, l' eſprimere la forza viva per la maſſa nel quadrato della velocità per modo, che non v' abbia alcun diviſore, perchè eſſendo la forza viva effetto delle azioni della gravità è utile ricordo il formarne una eſpreſſione ſpedita, e facile, porremo $e = \frac{mu^2}{a^2}$, intendendo per m la maſſa, per u la velocità; dunque, opportunamente ſoſtituendo, ſarà $fs = \frac{mu^2}{a}$; ovvero $\frac{fas}{m} = u^2$. La parabola adunque, che eſprime colle abſciſſe gli ſpa-

zj, e coll' ordinate le velocità, ha per parametro $\frac{fa}{m}$. Prendendo ora le differenze $\frac{fads}{m} = 2udu$; ma per le leggi del movimento uniforme, ſi ha $u = \frac{ads}{dt}$; dunque, fatta la ſurrogazione, ſarà $\frac{fads}{m} = \frac{2adsdu}{dt}$; ovvero $\frac{fdt}{2m} = du$, e integrando $\frac{ft}{2m} = u$; e ſoſtituendo così fatto valore nella formola degli ſpazj, e delle velocità ſarà $\frac{fat}{m} = \frac{f^2 t^2}{4m^2}$, ovvero $\frac{4mat}{f} = t^2$. La parabola dunque, che ha per abſciſſe gli ſpazj, e per ordinate i tempi, avrà per parametro $\frac{4ma}{f}$; e in caſo, che le maſſe ſieno proporzionali alle gravità, onde far ſi poſſa $m = f$, ſarà il parametro della prima, la quarta parte di quello della ſeconda.

Quindi le formule generali per tutti i generi di forze o variabili, o coſtanti ſaranno $\frac{fads}{m} = 2u\,du$, $\frac{fdt}{2m} = du$, le quali non differiſcono dall' ordinarie, ſe non perchè ſono prive del coefficiente, e diviſore 2, che nelle noſtre ritrovaſi. Ma nell' ordinarie la forza viva del corpo in movimento ſi dee eſprimere per $\frac{mu^2}{2a}$, dove noi la diſegniamo per una eſpreſſione più ſemplice, perchè non affetta del diviſore 2. I parametri poi delle due parabole, le quali coll' abſciſſe eſprimon gli ſpazj, e coll' ordinate la prima le velocità, l' altra i tempi, preſa per coſtante la forza f, adoprate le ordinarie formule ſi troveranno $\frac{2fa}{m}$, $\frac{2ma}{f}$; il primo de' quali è duplo, il ſecondo ſubduplo di quello, che ſi è trovato col nuovo metodo. Io però mi ſono nelle paſſate giornate ſervito, e mi ſervirò in avvenire delle formule ordinarie, perchè infine la coſa torna al medeſimo.

N. La rifleſſione non è di grande importanza; nonoſtante ho avuto piacere nell' aſcoltarla, perchè è ſempre coſa utile fiſſare la ſimplicità del metodo.

L. Ritorniamo adunque in cammino. Perciocchè ſi può non meno dalla ſuppoſizione de' Carteſiani, che pongono l' azione al tempo proporzionale, che da quella de' Leibniziani, i quali

li la vogliono proporzionale allo ſpazio, ricavar le vere leggi del moto naſcente dalla gravità, che la ſperienza conferma, non veggio, ſiccome da queſte ſtabilir ſi poſſa, quale delle due ſuppoſizioni ſia vera.

Però non ſi dee far gran caſo di molti argomenti, che da queſte leggi per l'una parte, e per l'altra ſi producono, perchè tacitamente ſuppongono ciò, che è in quiſtione, cioè che il numero degli impulſi, ovver l'azione della gravità ſia in ragione del tempo, ovver dello ſpazio. Tale è quello del Sig. Martini, che ſi legge nel capo terzo. Se vera fuſſe la ſentenza leibniziana, biſognerebbe, che una potenza quadrupla d'un' altra comunicaſſe allo ſteſſo corpo forza quadrupla bensì, ma celerità ſoltanto dupla; ma queſto è falſo, perocchè diviſa la potenza quadrupla in quattro parti eguali, ciaſcuna di queſte ſarà eguale all'altra potenza; e però il corpo riceverà da eſſe non meno la ſteſſa forza, che la ſteſſa velocità; dunque da tutte e quattro le parti inſieme, ovvero dalla forza quadrupla riceverà il corpo non men forza quadrupla, che velocità quadrupla.

In tutto queſto diſcorſo tacitamente ſupponeſi, che le azioni delle potenze ſi moltiplichino ſecondo gli elementi de' tempi; perchè nel fine di ſpazj eguali le velocità ricevute non ſono altrimenti quadrupla l'una dell'altra, ma ſolamente dupla: ed il corpo allora ſolamente dalla potenza quadrupla riceverà velocità quadrupla, quando eguali ſaranno i tempi, ne' quali l'azioni delle potenze non ſupporre, ma dimoſtrare ſi dovrebbero eguali. Se dunque non ſuppongaſi ciò, che è in quiſtione; queſto, ed altri argomenti dell'autore, e de' Carteſiani non provan nulla. Io non iſtarò minutamente a confutarli ad uno per uno, perchè ſarebbe impreſa lunga, ed inutile, ammettendo tutti la medeſima ſoluzione.

Similmente di poca forza ſembrami il diſcorſo del Signor Ermanno, che leggeſi nel primo tomo degli atti di Pietroburgo, quantunque egli militi per l'opinione leibniziana. Il corpo A ſollecitato dalla forza morta (*Fig.* 4) A*a* di continuo agente ſcorra la verticale AH. Arrivato, ch'egli ſarà in E, avrà acquiſtato un grado determinato di forza viva, perchè a confeſſione di tutti ha acquiſtato un determinato grado di velocità. Ma laſciando da parte la conſiderazion della velocità di-

ſaminiamo per qual maniera vada acquiſtando la forza nella diſceſa per lo ſpazio A E. Egli è chiaro, che cotal forza viva non può introdurſi nel corpo ſe non dalla gravità; la quale continuamente agiſce, mentre egli cade per lo ſpazio A E. Ma in qual maniera? Il corpo A mentre è in A vien ſollicitato dalla forza A *a*, in B dalla B *b* ec.; dunque in ogni punto dello ſpazio, che ſcorre, viene ſollicitato da una forza = A *a*; e però il luogo di tutte le forze morte ſarà il rettangolo A E *e a*. Per la qual coſa la forza viva acquiſtata in E non può eſſere nè maggiore, nè minore della ſomma di tutte le forze morte, che nel rettangolo A *e* ſi contengono. Laonde la forza viva in E alla forza viva in H ſarà, come il rettangolo A *e* al rettangolo A *b*; ovvero come la A E alla A H; ovvero come il quadrato della velocità in E al quadrato della velocità in H.

Eccovi l' argomento dell' Ermanno. Ma chi non vede, ch' io poſſo formare in favore de' Carteſiani un ſomigliante argomento, ſe la A H in luogo di rappreſentare gli ſpazj eſprimerà i tempi; giacchè la ſteſſa dimoſtrazione colle ſteſſe parole concepirò, cangiando ſolamente la voce di ſpazio in quella di tempo, e variando l' ultima conſeguenza, perchè i tempi A E, A H ſtanno, come le velocità acquiſtate al fine di queſti tempi. Vedete dunque, che dal dottiſſimo Ermanno ſi ſuppone ciò, che è in quiſtione, che le azioni della potenza A *a* ſieno non come i tempi, ma come gli ſpazj, la qual coſa non ſi vuol ſuppor, ma provare.

N. Sembrami, ſe non erro, che il Sig. Ermanno ſi ſtudj di ribattere così fatta iſtanza, dicendo in primo luogo, che de' due diſcorſi fatti, il primo ſi deve preferire al ſecondo, perocchè non meno il tempo, che la velocità è un ente modale, e incompleto; all' oppoſito lo ſpazio paſſato con movimento accelerato è un ente reale, che indica la moltitudine delle forze morte raccolte in una ſomma, cioè a dire la forza viva.

L. Io non iſtarò gran fatto a diſputare della natura del tempo, della velocità, e dello ſpazio, giudicando così fatte coſe eſſere di tal genere, che quanto più ſe ne ragiona, tanto più ſe ne intorbida l' idea, che per altro non è oſcura. Date loro qual nome più vi piaccia, l' idea, la qual dentro di me ho del tempo, non mi par, che eſcluda la poſſibilità, che il

nu-

numero delle follicitazioni, o fia l'azione della gravità fegua la proporzione del medefimo tempo, e il dire, ch'egli è un ente modale, e incompleto va a finire in parole, che nulla provano. Ma l'Ermanno per foftenere il fuo raziocinio ha un'altra rifleffione, che al prefente non mi ricordo.

N. Proccurerò io di ridurvela alla memoria, giacchè quella difertazione l'ho letta di frefco; ne farà d'uopo, che v'affanniate a trovar il luogo ful libro. Chiamifi la forza viva acquiftata nella difcefa $= V$, il fuo elemento $= dV$, il tempo $= T$, ed il fuo elemento $= dT$. A rettamente mifurare l'incremento della forza viva dV nafcente dalla gravità $= f$, che agifce nella maffa $= M$ dotata della velocità $= u$, fa di meftieri tener conto della velocità, la quale è infeparabile dallo ftato, in cui il corpo ritrovafi; dunque il predetto elemento di forza viva farà in ragion compofita della gravità, della velocità, e dell'elemento del tempo, cioè $dV = fudT$; ma $udT = dS$, cioè all'elemento dello fpazio; dunque $dV = fdS = Mudu$, la qual formula integrata da la forza viva proporzionale alla maffa nel quadrato della velocità.

L. Ella è appunto deffa, e con chiarezza me l'avete richiamata in memoria. Quefta rifleffione però del dottiffimo Ermanno, quantunque fia ingegnofa, pure fembrami, che in effa dimenticato fiafi della fua dottrina, che il tempo, e la velocità fieno enti modali, e incompleti. Ma lafciando ftar quefto, dico, ch'effa pure cade nella petizion di principio, e fuppone ciò, di che fi difputa, e fi quiftiona. Conciofiachè io vi domando, perchè l'elemento della forza viva non è proporzionale alla gravità, ed all'elemento del tempo, fe non perchè l'azione dalla gravità efercitata non crefce fecondo la mifura del tempo? e perchè bifogna tener conto della velocità moltiplicandola col tempicello, fe non perchè l'azione è proporzionale ad udT, la qual quantità è, come l'elemento dello fpazio? Ma quefto per l'appunto è quello, di che fi tratta, e fi muove quiftione. Onde con tutte quefte repliche non fi è avanzato ne pur un paffo.

N. Voi forfe vi penfate d'aver finita la guerra, e per voi medefimo v'applaudite; ma muove il Sig. Ermanno un nuovo attacco forfe de paffati più vigorofo. Rapprefentino A E, A H (*Fig.* 4, *e* 5) gli fpazj dal mobile con moto uniformemente acce-

cele-

celerato passati; LP, LQ i tempi, in cui si passano. A*a*, L*l* espriman la gravità costante, e si chiudano i rettangoli, come presentemente faccio nella figura. Se la forza raccolta dal mobile per gli spazj AE, AH venisse espressa per li rettangoli L*p*, L*q*; da questi medesimi rettangoli sarebbe rappresentata la resistenza, che il mobile dee superare ascendendo ne' tempi PL, QL; giacchè all' azione della gravità è contrario il moto all' in sù, e da lei a poco a poco s' estingue. Ponegansi eguali i tempi LP, PQ, e per conseguenza ancora i rettangoli L*p*, P*q*; dunque saranno eguali le resistenze da superarsi ne' tempi QP, PL. Vediamo un poco, se ciò si accordi colle regole del movimento proveniente dalla gravità. Cada il mobile A per lo spazio AE nel tempo LP, e per lo spazio AH nel tempo LQ; e suppongasi, che arrivato in E cangi di direzione, e colla medesima velocità poggi in alto; egli ascenderà fino in A, e niente più, dove per la resistenza della gravità si troverà d' ogni velocità spogliato. Similmente avverrà, che se il mobile pervenuto in H colla stessa velocità si rivolga all' in sù, arriverà fino in A. Esprimendosi le resistenze per li rettangoli L*p*, L*q*, per lo rettangolo P*q* verrà espressa la resistenza, che il mobile soffre nel montare da H in E; dunque essendo i due rettangoli P*q*, L*p* eguali, saranno eguali le resistenze, che il mobile soffre ascendendo prima da H in E, indi da E in A; ma è noto esser HE tripla di EA; dunque nell' altezza HE = 3, e nell' altezza EA = 1 le resistenze saranno eguali. La qual cosa non può avvenire, perchè la gravità non agirebbe uniformemente in tutta la lunghezza dello spazio, ma per salto, e difformemente; cosa del tutto assurda, e contraria alla teoria ricevuta del moto dei gravi; la qual suppone, che il mobile in ogni punto dello spazio, per lo quale ascende, o discende, sia grave. Esser grave poi vuol dire, che ivi dove è grave, sia sollecitato all' in giù dalla forza di gravità. E però nel comun sistema della gravità, anzi di tutte le forze morte si assume come certo, che in ogni punto dello spazio, ove ritrovasi il mobile, sia dalla forza sollicitato.

L. Voi chiamate questo attacco di maggior nerbo, che i precedenti; ma appresso di me non ha punto di forza, e sembrami debolissimo. E per farlo comparire tal, quale egli è, ritenuta la stessa costruzione, e lo stesso discorso del Signor Erman-

Ermanno, ponghiamo, che le resistenze ne' tempi eguali QP, PL vengano espresse colli rettangoli E*b*, A*e*, che sono come 3 : 1; dunque nel tempo PQ verrà il mobile a superare resistenza tripla di quella, che supera nel tempo eguale PL; la qual cosa non può avvenire, perchè per riguardo al tempo la gravità non agirebbe uniformemente, ma per salto, e difformemente, cosa del tutto assurda, e contraria alla teoria ricevuta delle leggi del moto, la qual suppone, che in ogni tempo il mobile sia grave, e però sollicitato all' in giù dalla forza costante di gravità.

N. Questo non è scioglière la difficoltà, ma un dimostrar soltanto, che quell' assurdo, il quale nella sentenza de' Cartesiani nasce per riguardo allo spazio, nasce parimenti nella leibniziana per riguardo al tempo.

L. Non basterebbe questo a farvi comprendere, che il discorso del Sig. Ermanno vien deformato da qualche genere di paralogismo, quando anche per me si vivesse in tenebre così dense, che discuoprire non lo sapessi? Pure mi studierò di farvi toccar con mano parecchi equivoci, e comincierò da ciò, ch' egli accenna in ultimo luogo esponendo in qual senso la teoria del moto accelerato esigga, che il mobile sia sollecitato all' in giù da una forza costante. Siccome devesi senza contraddizione del Sig. Ermanno distinguere la forza morta dalla sua azione; così per similitudine di ragione vuolsi distinguere la resistenza morta dalla sua azione. L' idee l' abbiamo già dichiarate nelle passate giornate, e superfluo sarebbe lo spendervi più parole. Or la teoria del moto uniformemente accelerato domanda, che la forza morta, o la resistenza morta sia sempre costante. La qual cosa si verifica tanto nella sentenza volgare, quanto nella novella del Leibnizio; giacchè nelle formule $fds = mudu$, $fdt = mdu$, la quantità f, che è costante, dinota la forza morta. Il Sig. Ermanno poi, quando prende i rettangoli P*q*, L*p* come dinotanti la resistenza patita dal mobile nell' ascendere per gli due spazj HE, EA, non può d' altro parlare, se non dell' azion della resistenza, la quale non si può assumere, che per ispazj eguali sia eguale senza chiarissima petizion di principio. Per la continua applicazione al corpo della forza di gravità, giacchè di questa unicamente facciam parola, nasce delle continuate azioni della gravità medesima agente nel mobi-

mobile, che monta all' in sù; le quali azioni, è dubbio, e si disputa, se crescano, e s' aumentino secondo gli elementi del tempo, o gli elementi dello spazio; ma l' assumere, che così fatte resistenze eguali sieno per ispazj eguali, è un supporre, che seguano nel crescere la proporzion degli spazj; dunque è un supporre ciò, che è in quistione.

C. Voi combattete con tanta forza gli argomenti, che si portano da Autori maggiori d' ogni eccezione in favore de' Leibniziani, che sembrate un ostinatissimo Cartesiano; e pure dal vostro parlare ci siamo avveduti, che avete abbracciata la sentenza del Leibnizio.

L. Questo vi può far fede, che non capriccio, ne passion di parte mi ha a quella sentenza portato, ma puro, e schietto amore di verità; mentre son prontissimo a rivolger l' arme contro a' più dotti sostenitori dell' opinione, che seguo; confessando ingenuamente, che molti de' loro argomenti non mi appagano, ne mi convincono; la qual' ingenuità è molto contraria al costume di coloro, che son portati dalla passione, i quali sogliono dar di mano a qualunque prova, sostenendola a più potere senza disaminare, quanto sia valida, e convincente. Ciò, che abbiam detto della gravità in supposizione, ch' ella sia costante, vale ancora quando è variabile, non potendosi determinare, quale delle due formule fds, fdt contenga la vera misura della sua azione. Non può dunque dedursi argomento ne per l' una parte, ne per l' altra dalla teoria della gravità, finchè non si rinvenga metodo di stabilire, se le azioni da questa forza si esercitino secondo la proporzion degli spazj, ovvero de' tempi.

N. Ma non si potrebbe egli stabilire per altro metodo, se l' azione della gravità sia in proporzione dello spazio, ovvero del tempo? la qual cosa fissata, le leggi del Galileo darebbero l' intera soluzione della presente controversia.

L. Io schiettamente userò d' una franca confessione, dicendovi, che fermandomi nella pura gravità agente per guisa, onde la direzione del movimento prodotto sia la stessa colla direzion della forza, non ho giammai potuto rinvenire una ferma dimostrazione, che mi soddisfaccia, e mi appaghi. Ho bensì ritrovata una qualche conghiettura di peso a mio credere non leggero, ma che è lontana dalla forza dimostrativa; ed io

io parlando con voi perſone di ſpirito geometrico, che non ſiete uſe di cedere ſe non all'evidenza, mi vergogno d'averla ſolo accennata.

N. Degnatevi di diſcender per poco dalla ſeverità geometrica, e d'eſporci così fatta conghiettura; giacchè ſiamo quì radunati tre amici inſieme per eſaminare tutto ciò, che a così fatta quiſtione appartiene; onde non mi par bene di laſciar indietro le conghietture.

L. Non perchè io ſperi di produr coſa, che ſia plauſibile, ma perchè amo di ſeguire il voſtro volere, produrrò quella conghiettura, la qual mi muove a credere, che le azioni della gravità ſeguano la proporzion degli ſpazj. Che la gravità ſia coſtante non ſi verifica ſe non ſe nelle noſtre vicinanze, dove le diſtanze dal centro terreſtre ſono sì poco differenti, che ſi vogliono computar come eguali. Per altro preſe diſtanze di conſiderabile differenza non v'ha filoſofo, il qual non affermi, diſuguali eſſere le gravità del medeſimo corpo. Or io domando, ſe muovendoſi un corpo all'in giù, per ottenere il vero valor della gravità, ſi debba riguardo avere allo ſpazio, o al tempo? Convengono ſenza fallo tutti i filoſofi, che la gravità ha relazione alla diſtanza dal centro; che altro non è ſe non lo ſpazio da paſſarſi, e che il tempo in queſto non è da conſiderarſi per niente: ed i Signori Newtoniani vogliono, che la gravità ſia in ragion reciproca duplicata delle diſtanze dal centro. Dunque non è egli veriſimile, che ſiccome ad ogni elemento di ſpazio la gravità cangia di valore, così ſimilmente ad ogni elemento di ſpazio eſerciti una novella azione al ſuo valore proporzionale, e che ſiccome nel cangiarſi il valor della gravità ſi vuol conſiderare lo ſpazio, così nell'agir della gravità por ſi debba mente allo ſpazio ſolo? Queſta io confeſſo eſſere una ſemplice conghiettura; voi datele quel peſo, di che degna la giudicate.

N. Per quanto può darſi di peſo ad una ragione non dimoſtrativa, io tutto lo dò alla voſtra conghiettura, che per la ſua ſemplicità m'è piacciuta aſſai, e m'è parſa belliſſima. Io ne voglio aggiungere un'altra, ſe lo mi permettete, la quale ſe non ſarà univerſale come la voſtra, avrà almeno gran forza contra de' Carteſiani. Voi me l'avete eccitata col parlar voſtro. E' dottrina degli acuti filoſofi, che ſeguono il Carteſio,

ſiccome jeri accennai, che la gravità ſia originata dalla materia ſottile, che circola. Concioſſiachè girandoſi in vortice la materia ſottile con molto maggiore velocità, che non il corpo, cui daſſi nome di grave, concepiſce maggior forza centrifuga, che non il ſaſſo; e però dovendo prevaler chi ha più forza, e cedere, chi ne ha meno, è neceſſario, che il ſaſſo ſia ſpinto verſo del centro; d'onde in lui diſcuopreſi quella forza, cui noi diamo il nome di gravità. Poſta cotal dottrina de' Carteſiani non è egli certiſſimo, che diſcendendo il mobile incontra ad ogni punto di ſpazio un nuovo ſtrato di materia ſottile, che prevalendo in forza centrifuga dee di neceſſità con novella azione animarlo, acciocchè più velocemente diſcenda; dunque l'azione deve aver relazione al numero degli ſtrati della materia ſottile, e per conſeguenza allo ſpazio. Quindi forza è, che o i Signori Carteſiani abbandonino la teoria de' vortici, ovvero ch'entrino nella teoria delle forze vive leibniziane.

L. Queſto argomento, che voi dalla ſentenza de' Carteſiani ſpettante alla cagion della gravità avete dedotto contro all' opinione loro intorno alle forze vive, non è punto diverſo, anzi interamente conforme a quello, che dalla teoria degli elaſtri, dalla quantità delle foſſe ſcavate nella materia cedente, e da altre così fatte ſperienze i leibniziani derivano, di cui, qual ſia il mio giudicio, ho promeſſo in oggi di dichiararvi. Ma prima ſarà bene, che diciam due parole intorno all'argomento del Leibnizio, di cui jeri ſi è fatta qualche menzione, e che indi diſcendiamo al movimento perpetuo, che lo ſteſſo autore giudica conſeguire dalla poſizion carteſiana. Voi però ci ridurrete a memoria l'argomento eſpoſto in prima dal Leibnizio.

C. Due principj aſſume il dottiſſimo uomo. Il primo è, che il mobile, in virtù della gravità diſcendendo, acquiſta tanta forza, quanta è valevole a traſportarlo all'altezza, da cui è caduto. Il ſecondo principio è, che è neceſſaria la ſteſſa forza a traſportar il mobile d'una libbra all'altezza di quattro cubiti, che il mobile di quattro libbre all'altezza d'un cubito. Ciò ſuppoſto cada il mobile uno dall'altezza quattro, e il mobile quattro dall'altezza uno, il primo acquiſterà forza da aſcendere all'altezza quattro, il ſecondo all'altezza uno; dunque per lo ſecondo principio avranno acquiſtate forze eguali;

ma

ma eguali non farebbero, fe fi doveffero alla foggia computare de' Cartefiani; eguali ritroveranfi computate alla foggia de' leibniziani; dunque fi devono mifurare fecondo gli infegnamenti del Leibnizio.

L. Il principio fecondo, di che fervefi il Leibnizio è appunto quel deffo, di che fi difputa; perocchè, fe l'azione della gravità è come lo fpazio, egli è veriffimo; ma fe foffe come il tempo, egli farebbe falfiffimo; ed in fuo luogo fi dovrebbe foftituire il feguente. Ad alzare il corpo uno nel tempo quattro fi richiede la medefima forza, che ad alzare il corpo quattro nel tempo uno. Adunque quando prima non fi affuma per vero, che l'azione fia come lo fpazio, l'argomento è d'ogni vigore affatto sfornito. Ben mi maraviglio, che il Signor Leibnizio uomo di profondo, ed acuto ingegno rifpondendo al Signor Papin conceda, che l'azione, o come egli lo chiama, il numero delle impreffioni, o fia degli impulfi, fegua la proporzione de' tempi, e nonoftante foftenga la fua opinione. Leggiamo negli atti di Lipfia del 1691 le fue fteffe parole. *Rifpondo negando la maggior del profilogifmo, che dice. Que' corpi, che vincer poffono un egual numero d'impreffioni, poffono vincere una egual refiftenza. Quefta propofizione io nego, prendendo la refiftenza per la quantità delle forze contrarie. Ed acciocchè niun penfi da me negarfi alla cieca, e con temerità, deefi fapere, che in effa contienfi ciò, che è in quiftione. Imperciocchè non effendo altro l'impreffion della gravità, fe non il grado della velocità impreffo a ciafcuna parte, per certo fe tolleraffi, che la refiftenza, ovvero la forza contraria da cotal' impreffione foffe mifurata, concederei, che la forza devefi computare per la multiplicazion della velocità nella quantità della materia, o fia per la quantità del movimento.* Fin quì il Leibnizio, da cui io amerei d'intendere, qual mai può effer la forza contraria al mobile, che va in fu, fe non lo è la gravità colle fue fucceffive impreffioni; e per certo la refiftenza, o fia la forza contraria non nafce da altra parte, fe non dall'azion continua della gravità. Per la qual cofa io a foftenere la fua fentenza concederei la propofizione, ch'ei nega; e negherei, che l'impreffione, o fia l'azione della gravità non fia altro, che il grado di velocità impreffo a ciafcuna parte; ma direi, che l'impreffione della gravità, ovver l'azione altro non è,

 che

che il grado di forza viva comunicato; e se si assumesse, che ad ogni grado eguale di velocità corrisponda un egual grado di forza, si supporrebbe quello appunto, di che si quistiona.

C. Chiaro si vede, che da voi non combattesi se non per amore di verità, perciocchè, quando sia d'uopo, voi oppugnate non meno il Leibnizio, che i suoi avversarj. Ma lasciamo star questo. Il Sig. Leibnizio ha proccurato di stabilire la sua sentenza conducendo la contraria all'assurdo di non so qual moto perpetuo. D'argomento sì fatto, io ho udito formar diversi giudicj; però vi prego di dichiararmene il vostro sinceramente.

L. Voi dite bene, che intorno a quell'argomento sonosi fatti giudicj molto diversi. Poichè i Signori Jacopo Ermanno, e Giovanni Bernoulli dimostrano di farne non picciola stima; all'opposito il Marchese Giovanni Poleni, dice, che per questo solo non partirebbe dalla vulgare opinione, se ad essa aderisse. Ma prima di formarne giudicio alcuno sarà bene, che colle stesse parole del Leibnizio noi ascoltiamo il suo argomento tal, quale leggesi negli atti di Lipsia del 1690. Egli ha per fine di portar l'ipotesi de' Cartesiani al moto perpetuo meccanico, cioè per quel, ch'egli pensa, all'assurdo: Leggete quì =

C. Traducendo le sue parole (*Fig. 6*) nel nostro volgar idioma, dice così. *Ponghiamo per cagion d'esempio, che il globo* A *di quattro libbre discenda dall'altezza d'un piede* 1A E *per una linea inclinata* 1A 2A, *finchè giunto sia nel piano orizzontale* EF, *ed ivi scorra dal punto* 2A *al punto* 3A *con un grado di velocità per la discesa acquistato. Fermo stia nello stesso orizzontal piano un altro globo* B *d'una libbra nel luogo* 1B. *Supponghiam ora, che tutta la forza del globo* A *debbasi nel globo* B *trasferire per guisa, che restando* A *senza moto nel luogo dell'orizzonte* 3A *il solo globo* B *sia dotato di movimento. Ricercasi con quanta velocità dovrà muoversi il globo* B, *acciocchè tanto di forza riceva, quanto ne avea il globo* A. *I Cartesiani insegnano, che essendo il globo* B *quattro volte minore di* A *riceverà una velocità di quattro gradi, cioè quattro volte maggiore della velocità di* A; *perciocchè tanto di forza ha il globo* A *di quattro libbre muoventesi con un grado di velocità, quanto il corpo* B *d'una libbra dotato di quattro gradi di velocità. Ma io per tale sostituzione farò vedere, che*

nasce

nasce il movimento perpetuo, o sia l'assurdo. Conciossiachè il corpo B d'una libbra dotato di quattro gradi di velocità rivolgendo in alto il suo movimento (come se scorrendo dal punto 1B al punto 2B incontri una linea inclinata 2B 3B) potrà ascendere al punto 3B, ovvero all'altezza perpendicolare F 3B di sedici piedi; perchè il corpo A discendendo dall'altezza perpendicolare d'un piede acquistato avea un grado di velocità, e per conseguenza all'altezza d'un piede potea montare; essendo le altezze, alle quali per vigor delle velocità si può ascendere, come i quadrati delle celerità. Ma quindi nasce il movimento perpetuo, o sia l'effetto più forte della sua causa. Imperocchè noi possiamo far uso del globo B elevato a sedici piedi per modo, che di là novellamente discendendo nell'orizzonte 4B per mezzo d'una facilissima macchina, come d'una stadera rettilinea inclinata, possa alzar il globo A di quattro libbre posto nel luogo dell'orizzonte 3A ad una altezza perpendicolare di quasi quattro piedi. Imperciocchè si concepisca una stadera, che si porti da 3A a 3B nel fulcro, o centro di libbrazione C divisa in due braccia ineguali di lunghezza, ma eguali di peso, C 3A, C 3B, ed il braccio C 3B sia alquanto più, che quadruplo del braccio C 3A. Pertanto il globo B incontrando l'estremità della stadera 3B vince, ed alza il globo A posto nell'altra estremità 3A; perchè maggior è la ragion reciproca delle distanze dal centro (cioè per la costruzione maggiore, che quadrupla) della ragion de' pesi (la quale è quadrupla per l'ipotesi) e perciò il globo B discendendo sino all'orizzonte dall'altezza perpendicolare 3B F di piedi sedici da 3B in 4B alzerà il corpo A da 3A in 4A ad una altezza perpendicolare poco minore di 4 piedi, e tanto poco minore, quanto vorrai. Per la pratica basterà, che il corpo A si porti all'altezza di tre piedi in circa, e anche manco. La qual cosa è assurda. Conciossiachè nel principio A era sopra all'orizzonte all'altezza d'un piede posto B nello stesso orizzonte; ora nel fine essendosi B all'orizzonte restituito, A non si è restituito all'altezza d'un piede, lo che al più potea accadere rimossi tutti gli accidentali impedimenti, ma è asceso all'altezza di più di tre, e quasi di quattro piedi; e ciò per forza della sua discesa da un piede solo per mezzo del corpo B interposto, il quale però, siccome supponesi niuna forza ha contribuito, ma ha ricevuto la sola forza del corpo A. Così quasi tre volte più di forza ab-

biam

biam guadagnato, e per così dire estratto dal niente; le quali cose chi può negare, che assurde non sieno? Ora non molto lontano vuolsi ricercar il movimento perpetuo; giacchè cosa facile è il far sì, che il globo A *dal luogo* 4A *ritorni al primo luogo* 1A, *e che prima nel viaggio, che ha una caduta di quasi tre piedi, operi un qualche effetto meccanico, alzi pesi, rivolga macchine ec. Similmente il globo* B, *se il luogo* 4B *si prenda ogni poco più alto dell' orizzonte, frattanto che* A *ritorna ad* 1A, *viaggiando potrà portarsi ad* 1B; *e con ciò tutte le cose allo stato di prima ritorneranno, essendosi operato un effetto meccanico notabile di sopra più, e lo stesso giuoco si potrà di mano in mano ripetere. E chi tali assurdi potrà tollerare?* Eccovi l' argomento. Che forza vi fa egli? Io comechè v' abbia parecchie volte pensato, non so che dirne.

L. Io dirò candidamente, che sto di mezzo tra coloro, che lo credono invitto, e dimostrativo; e che lo giudicano di niuna forza. Io penso, ch' egli ci dia una forte, e non dispregevole conghiettura favorevole alla sentenza leibniziana. Ed a farlo vedere; in due maniere, e sotto due aspetti può comparirci d' avanti l' esposto argomento, amendue toccate dal Leibnizio; primo in quanto per esso si prova generarsi un effetto maggiore della sua causa; di più in quanto per esso si perviene al moto perpetuo, supponendo mai sempre l' opinion del Cartesio. E quanto al primo voi vedete, che per la sola sostituzion d' una forza eguale in luogo d' un altra; cioè d' un corpo d' una libbra dotato di quattro gradi di velocità in luogo d' un corpo di quattro libbre dotato d' un grado di velocità, i quai corpi sono di forza eguale secondo la sentenza de' Cartesiani, fatta io dico questa sostituzione, si alza il corpo A ad una altezza quasi quattro volte maggiore di quella, d' onde era caduto. Fate, ch' egli cada verticalmente, finchè all' orizzonte pervenga, non vedete, che cadendo dal punto 4A acquista una velocità quasi doppia di quella, che avea acquistata cadendo dal punto 1A? Domando qual' è la causa generante cotal' effetto? Noi non abbiamo altra forza se non se quella, che si acquista dal mobile A per la caduta 1 AE, a cui, annullata questa, se ne sostituisce una eguale. Qual' è l' effetto? Egli è la forza acquistata dallo stesso mobile A per la caduta 4A 3A, la qual forza è quasi dupla dell' altra. E come mai è possibile, che

una

una causa generi un effetto quasi duplo di se medesima?

N. Non avrete a sdegno, ch' io prenda la difesa de' contraddittori del Leibnizio. Facciamo pure, che il corpo A innalzato dalla leva non arrivi se non ad una altezza eguale ad 1 A E; indi lasciatelo cadere liberamente, finchè giunga due, o tre piedi di sotto all' orizzontale E F; non è manifesto, ch' egli avrà acquistato forza molto maggiore di quella, che aveva arrivato in E; e pure questa è la causa, quello è l' effetto.

L. Avvertite, Signore, ch' io ho considerato il corpo giunto, e collocato nella medesima orizzontale; la dove voi lo constituite una volta più alto, l' altra più basso; onde vi nego, che la causa generante il vostro effetto sia precisamente la forza acquistata per la caduta 1 A E, ma vi dico esser questa coll' aggiunta di tutta l' azione esercitata dalla gravità di sotto all' orizzontal E F, la qual messa a computo, ritroverete la necessaria, e perfetta egualità tra la cagione, e l' effetto.

N. M' avveggo ora, che voi cadete in quello stesso paralogismo, che avete in altri ripreso, cioè che supponete, che l' azione esercitata dalla gravità sia in ragion degli spazj; perchè, ciò non supponendo, ad eguagliar le partite basterebbe, che pervenuto il corpo in 4 A lo lasciaste cadere per quello stesso tempo, che impiega a cader per 1 A E, e voi allor troverete, che l' effetto non supererà la cagione.

L. E pur niente suppongo di quello, che voi pensate; ma solamente suppongo, che un mobile in virtù di quella forza, che acquista, o di altra forza eguale, che a lei si sostituisca, quando niuna particella se ne perda, e niuna novellamente vi s' introduca, arrivato allo stesso luogo, cioè alla stessa orizzontale per qualunque mezzo, o strada, che questo intervenga, debba avere nè più, nè manco di forza di quella, che avea cadendo acquistata; e ciò supposto sembrami l' argomento del Leibnizio molto convincente, e sottile.

N. Ma è egli vero cotal principio, e certo così, onde si possa sopra di esso, come sopra di stabile fondamento una sicura dimostrazione innalzare?

L. Ed appunto per questo dissi da prima, che l' argomento non è dimostrativo, ma solo conghietturale. Il principio io lo giudico vero, benchè di prova non così facile; pure mi studierò di corroborarlo con parecchie riflessioni, per quanto mi

sarà

farà possibile. Ed in primo luogo rigetterò ad evidenza, quanto per voi si è detto in confutazione dell' argomento leibniziano. Voi avete detto, che se giunto il mobile al punto 4A lo lascierò cadere per quello stesso tempo, che ha impiegato nella discesa per 1A E ritroverò la perfetta, e necessaria egualità tra la cagione, e l' effetto; ed io vi dico assolutamente di nò. Perchè la forza acquistata dal mobile nel punto E è l' unica, e sola causa dell' effetto plenario, ed intero; la dove la forza del mobile cadente dal punto 4A nello stesso tempo non è l' effetto unico, e solo di quella forza, siccome voi immaginato vi siete. Perciocchè la leva aggravata da due corpi B, A, mentre il primo discende, l' altro ascende, acquista pure qualche velocità, e per conseguenza i corpi B, A arrivati in 4B, 4A sono pur dotati di qualche forza, la quale s' estingue, o per dir meglio in altri effetti s' impiega, ne ha a far nulla colla forza acquistata dal corpo A nel discendere dal punto 4A; dunque essendo pur questa parte dell' effetto, se si congiunga coll' altra acquistata dal mobile cadente dal punto 4A, si avrà un effetto alquanto maggiore della sua causa.

N. Oh questa obbiezione non si può far egualmente, se avendo riguardo non al tempo, ma allo spazio io lascierò cadere il mobile dal punto 4A per uno spazio eguale ad 1A E?

L. Sì, Signore, se io lasciassi cadere il mobile per uno spazio eguale ad 1A E; ma nò, se lo lascierò cadere fino all' orizzontale EF. Conciossiachè voi intendete benissimo, che surrogando in cambio di A un corpo B subquadruplo dotato di forza eguale non dovrà esser animato se non da velocità dupla; dunque l' altezza F 3B, a cui ascende, non sarà che quadrupla dell' altezza 1A E; e però divisa, e adoprata la leva, come sopra, trasporteraffi il corpo A ad una altezza 3A 4A, che sarà alquanto minore dell' altezza 1A E; dunque discendendo fin al punto 3A acquisterà una forza alquanto minore di quella, che aveva in E; e tanto sarà minore, quanta è la forza de' due corpi trasportati dalla leva ne' punti 4B, 4A; ed in questo non v' ha assurdo di sorte alcuna, anzi ritrovasi la necessaria egualità tra la cagione, e l' effetto.

N. Non ostante il principio, di che vi servite, non può d' altra fonte trar l' origine, se non da questo, che forza viva si genera, e si estingue secondo il crescere degli spazj. Per

altro

altro se la economia delle forze tanto guadagnate, quanto perdute si regolasse secondo la misura del tempo, non veggio, perchè giunto il mobile alla stessa orizzontale non potesse avere maggiore, eguale, e minor forza di quella, che aveva prima.

L. Che l'abbia minore non v'ha difficoltà; basta, che in altri effetti parte se ne perda, e se ne consumi; anzi negli sperimenti non potendosi mai levare tutti gli impedimenti avverrà, che minore sempre ella sia; ne si avrebbe eguale, se non rimosse tutte le resistenze; ma maggiore, credetemi, che è impossibile, ch' ella sia. Ed acciocchè veggiate ciò, per cui rimaso sono convinto, vengo all'altro aspetto, sotto di cui può essere rimirato l' argomento del Leibnizio. Voi sapete, quanti non anni, ma secoli siensi studiati uomini e molti in numero, e di profondo ingegno, e di scienza maravigliosamente forniti di ritrovare un movimento perpetuo puramente meccanico. Quanti artificj non si sono tentati, quanti mezzi non si son messi in opera? ed il pensare a così fatto problema è stato uno stesso, che il perdere il tempo, la fatica, e lo studio. Agli amatori del moto perpetuo è avvenuto, siccome a quelli, che hanno ricercata la quadratura del circolo, e la divisione in tre parti eguali dell' angolo rettilineo per mezzo di soli circoli, e linee rette. Ma siccome questi problemi si sono di già scoperti, e dimostrati impossibili, così i molti inutili tentativi mi danno a credere, che ancor il moto perpetuo puramente meccanico sia impossibile. Che se senza introduzione di nuova forza può un mobile in una orizzontale avere maggiore forza di quella, che aveva prima, io non so vedere, come mai potesse esser impossibile il movimento perpetuo puramente meccanico.

N. Io volentieri v'accordo, che quando si sostituisse in luogo d' un corpo quadruplo un subquadruplo dotato della medesima forza, si otterrebbe sicuramente il moto perpetuo, ne tanti tentativi messi fin ora in opra sarebbero stati inutili. Ma questa sostituzione essendo praticamente impossibile ne segue, che impossibile sia pure il movimento perpetuo puramente meccanico. E come volete voi, che si trasferisca tutta la forza d' un corpo maggiore in un minore. Non è egli noto per le leggi della comunicazione del movimento, che se il corpo A quadruplo con un grado di velocità urta nel corpo B, che sta in quiete, egli ritiene per se $\frac{3}{5}$ della velocità, che ave-

va, e $\frac{8}{9}$ ne dona al corpo B; e per conseguenza divide in guisa la forza, che parte ne tien per se, parte nell' altro corpo ne trasferisce; e parlo de' corpi elastici perfettamente.

L. Voi tra le infinite maniere, onde può un corpo trasferir la forza in un altro, non ne considerate, che una sola; e per questo ottimamente dite, che un corpo quadruplo, urtando con una data velocità in un quiescente, non può tutta la sua forza in lui trasferire. Ma siccome accade, che per questa maniera un corpo trasferisca tutta la sua forza in uno eguale, che sta in quiete; così cosa molto verisimile è, che un mezzo si possa dare, con che un corpo muoventesi trasferisca tutta la sua forza in un corpo subquadruplo, che sta in quiete. E chi può mai darsi a credere, che in tanti tentativi, che si son fatti per rinvenire il moto perpetuo, in questo mezzo non siasi dato di petto; non ostante il moto perpetuo non si è rinvenuto.

E perchè veggiate, che non parlo a caso, vi dico, che il modo di trasferire tutta la forza d' un corpo in moto in un corpo subquadruplo è stato ritrovato dal Sig. Giovanni Bernoulli; ne al presente è mio pensiero di farne la dimostrazione compiuta, dovendo nelle giornate seguenti sopra ciò ritornare il nostro discorso; solo proccurerò di dimostrarvi, che questo modo non pur è possibile, ma che si deve dar in effetto. (*Fig.* 7) Siavi una leva, che rivolger si possa intorno al punto C, a cui sia congiunto il corpo B; si prenda il corpo A quadruplo; ed il tutto io intendo essere di perfetta elasticità dotato. Egli è manifesto, che se il corpo A urterà la leva nel punto B, fatta la comunicazione del movimento, il corpo A terrà dietro al corpo B camminando amendue alla medesima parte; ma se il corpo A urterà in un punto D vicinissimo al fulcro, egli, seguita la comunicazione del movimento, ribalzerà in dietro, e con velocità negativa viaggerà alla piaggia opposita a quella, ove il punto D è diretto. Dunque dovendosi osservar la legge della continuità, ne potendo il corpo A passare da una velocità positiva ad una negativa se non per tutti i gradi intermedj, tra quali quello ritrovasi della celerità nulla, sarà di necessità, che urtando in qualche punto medio tra B, D perda tutta la sua velocità; ma in que-

questo caso egli tutta la forza trasfonderebbe nel corpo B; dunque non solo è possibile, ma si dee dare il caso, in cui il corpo A trasferisca tutta la sua forza in un corpo subquadruplo.

N. Se per voi si fosse posta in uso una leva perfettamente rigida, ed inflessibile, vi risponderei seguendo il Sig. Papin, che di questo genere di leve non ve ne ha in natura; ma perchè alla leva perfettamente rigida sostituite una leva perfettamente elastica, contro di voi userò d'una somigliante risposta, che delle leve perfettamente elastiche la natura non ne ha mai formate; e però se ad avere il movimento perpetuo puramente meccanico è necessaria una di cotai leve, non v'ha speranza alcuna di poterlo ottenere.

L. Vi sovvenga, che il Leibnizio dimostra, che il corpo A si trasporta ad un'altezza quasi quadrupla di quella, da cui era disceso, supposta la verità dell'opinion cartesiana. Onde adoprando una leva, la qual s'accosti, se non arrivi, ad una perfetta elasticità, per cui se non tutta intera, almen grandissima parte della sua forza dal corpo A venga trasportata nel corpo B, se non alzeremo il primo ad una sublimità quadrupla, almeno otteremo una sublimità tripla, o dupla; e tanto basta, anzi è d'avanzo ad ottenere il movimento perpetuo. Che se volete la cosa ancor più sicura, prendete il corpo B non sol subquadruplo, ma subquintuplo, o in qualunque altra minor proporzione per rapporto al corpo A, e così accrescerete per un altro verso l'altezza, a cui verrà il corpo A sollevato Le quali cose tutte se non volete, che formino una plenaria risoluta dimostrazione, almeno ci danno un fortissimo motivo di dubitare della verità della sentenza cartesiana.

N. Merita laude la prudenza vostra per la mansueta conclusione, che avete dedotta da' vostri ragionamenti; i quali perchè abbiano forza di completa dimostrazione, osterà sempre l'incertezza, in cui siamo, se il movimento perpetuo, che per altro sarebbe possibile, riesca impossibile per mancanza degli strumenti, i quali non si possano avere in natura tali, quali sarebbero necessarj. Per altro non può negarsi, che tutte queste riflessioni non rendano molto verisimile, che qualunque corpo alla stessa orizzontal pervenuto sia dotato della stessa forza viva, ovvero che l'azione della gravità costante sia misurata dallo spazio scorso.

C. Confessiamo però ingenuamente, che tutto ciò non è se non una semplice conghiettura, e che rimane ancora indeciso, se l'azion della gravità sia proporzionale allo spazio, o al tempo, e per conseguenza se la forza viva sia in ragion del quadrato della velocità, ovvero della semplice velocità; e chiunque sosterrà questa opinione, difficilmente colla teoria della gravità potrà essere dal Leibniziano convinto. Mi piace, che voi senza passione avete delle due parti esaminati i momenti, e schiettamente disapprovato ciò, che non vi piace non men nell'una, che nell'altra sentenza. E questa letteraria indifferenza è necessaria ad ogni filosofo, che abbia unicamente amor alla verità. Ma poichè ci avete dichiarato il vostro sentimento intorno agli argomenti, che discendono dalla gravità, tempo è omai, che ci manifestiate il vostro giudicio intorno all'argomento de' Leibniziani dedotto dalla teoria comparata degli elastri, e dalle fosse scavate nella materia cedente, di cui a lungo jeri abbiam favellato. Ci avete sì lungo spazio tenuti sospesi, che sarebbe troppa durezza, se omai non rendeste paghe le nostre brame.

L. La mia durezza non è interamente indegna di scusa; perciocchè spero, che molto più chiari riusciranno i miei sentimenti, dopo aver esaminati i momenti delle ragioni, che sopra alla forza della gravità si sono per l'una parte, e per l'altra formate. Altro divario non v'ha tra la gravità, e l'elasticità, ovvero la tenacità, onde le particelle della materia molle sono dotate, se non che la natura della gravità è affatto all'oscuro, la dove della tenacità sappiamo, che ad ogni spazietto eguale, che vien passato dal mobile, uno strato eguale, ed egualmente tenace si oppone al suo movimento; e della elasticità sappiamo, che a misura che il mobile fa viaggio, dee chiuder gli elastri, che gli si oppongono, e colla forza, onde son dotati, resistono all'esser chiusi; ovvero a misura, che si apron gli elastri, ed esercitano la forza, i corpi fan viaggio; la qual cosa, siccome ha avvertito il Sig. Nestore, dir si dovrebbe ancor della gravità, quando provenisse dalla forza centrifuga della materia sottile; perciocchè ad ogni spazio eguale incontrerebbe il mobile un' eguale strato di materia sottile fornito di forza centrifuga. Ma per brevità parleremo solo della materia molle, giacchè tutte le cose, che si diranno, applicar

plicar si potranno agevolmente all' altre forze. Quindi è avvenuto, che considerando i Sig. Leibniziani, che dovendosi ad ogni spazio eguale uno strato vincere d' eguale tenacità, hanno giudicato, che la reazione della tenacità seguitasse la proporzion del numero degli strati eguali, e per conseguenza la proporzion degli spazj passati; ed essendo così fatta reazione il vero effetto della forza viva estinta, ancor la forza viva fosse proporzionale a tutta la quantità degli spazj passati, ovvero delle fosse scavate. Ne a questa supposizion de' Leibniziani si sono punto opposti i loro contraddittori; che anzi l' hanno ammessa di buonissimo grado; solo detto hanno non essere questa l' unica ragione, perchè devesi accompagnare, e comporre con qualche altra ragion del tempo. Ma credo d' aver jeri bastevolmente mostrato, che la ragione del tempo, qualunque siasi, non può giammai accomodar le partite a loro favore.

C. Par cosa naturale, e da non potersi negare, che l' intera azione della tenacità debba esser in proporzione della fossa formata, o sia della materia tenace dal suo luogo cacciata, non considerando al presente, se debba accompagnarsi con altra proporzione sì, o nò.

L. E a voi, Sig. Nestore, che ne pare?

N. Io non saprei giudicare diversamente.

L. Non sono dunque degni interamente di disapprovazione sì i Leibniziani, sì i Cartesiani, se ciò hanno ricevuto senza ulteriore dimostrazione. E a dirvi schiettamente, e candidamente il mio sentimento, questa è una supposizione sì naturale, e sì congrua, ch' io senza altro sarei inclinato ad ammetterla, e quando non la giudicassi evidente, la crederei così probabile, e verisimile, quanto altra esser lo possa. Ricevuta poi così fatta supposizione non sosteranno mai i Cartesiani la loro sentenza, facciano pur quell' uso del tempo, che piaccia loro, e ne adoprino qualunque proporzione o inversa, o diretta.

Nonostante però, che questa supposizione sia stata quasi concordemente ricevuta da' Cartesiani, non crediate, che non ve n' abbia avuto alcuno di vista più acuta, che l' abbia apertamente negata. Di così fatta sentenza sembrano essere il Sig. Dionisio Papin, sebbene non d' altro parla, che della gravità, ed universalmente il P. Ruggero Boskovik, i quali son d' av-

d'avvifo, che l'azione mifurar fi debba, non dalla tenacità, e dallo fpazio, ma dalla tenacità, e dal tempo, in cui effa fta applicata allo fteffo corpo. E quefti per mio avvifo hanno più fenfatamente filofofato, che gli altri Cartefiani, perchè quel mifchiare infieme la proporzion dello fpazio con qualche proporzione del tempo, non può riufcire. Ma quando fi dica defumerfi la quantità della reazione, che è il vero effetto della forza viva, dalla refiftenza nel tempo, fi troverà fempre proporzionale alla quantità del movimento; ficcome defumendofi dalla forza nello fpazio, fi troverà fempre proporzionale alla forza viva leibniziana.

N. Offervate di grazia, fe ho penetrato a dovere il voftro fentimento. Voi dite, che l'argomento, di cui fi fervono i Leibniziani prefo dalla quantità della foffa fcavata, e dal numero degli elaftri, comechè vi fembri avere moltiffimo del probabile, pure chiamar non fi può affolutamente dimoftrativo. Imperciocchè la forza viva devefi riputar proporzionale all' intera azione, che la diftrugge, effendo quella la caufa, e quefta l'effetto; ma l'intera azione della refiftenza non è dimoftrata proporzionale alla foffa fcavata, ne al numero degli elaftri chiufi. Imperocchè ciò farebbe veriffimo, quando fi mifuraffe l'azione dalla potenza, e dallo fpazio; ma farà falfiffimo, quando fi mifuri dalla refiftenza, e dal tempo; dunque quantunque le foffe fcavate, e gli elaftri chiufi fieno, come le maffe ne' quadrati delle velocità, non refta dimoftrato, che in fomigliante proporzione fieno le forze vive; anzi fe l'azioni fi mifureranno dal tempo, fi troveranno in proporzione delle quantità del movimento. Quel che fi è detto delle forze vive, che eftinguonfi, fi dica egualmente delle forze vive, che fi producono. Refta dunque ancor da difcutere, in qual guifa fe dal tempo, o dallo fpazio l'azione mifurare fi voglia. Ho io ben penetrati i voftri fentimenti?

L. Non fi può meglio. Ma trattiamo la cofa più generalmente. Voi fapete, che ne' movimenti così accelerati, come ritardati vagliono fempre mai le due notiffime formule $fdt = mdu$; $fds = mudu$, nelle quali fe il moto è accelerato, du è pofitiva; fe ritardato, è negativa. Ora fi può dubitare in quale di quefte due formule fia contenuta la vera eftimazion dell' azione. Se effa è contenuta nella prima

fdt

$fdt = mdu$, farà integrando $Sfdt = mu$; onde all' intera azione si ritrova la quantità del moto proporzionale, e per conseguenza vera la sentenza de' Cartesiani. Se la misura dell' azione è contenuta nell' altra formula $fds = mudu$, farà integrando $Sfds = \frac{mu^2}{2}$, e per conseguenza vera la sentenza de' Leibniziani. Ho fatta l' integrazione supponendo du positiva; le stesse conseguenze si deduranno posta du negativa, quando nell' integrazione si aggiunga la necessaria costante. Ecco ridotta la quistione al suo vero punto. Ricercasi dunque, se l' azione sia proporzionale alla potenza, ed al tempicello, ovvero alla potenza, ed allo spazio, per cui si esercita. Dalla risoluzione della qual quistione discenderà come un semplicissimo corollario, qual sia la misura della forza viva.

C. Mi si squarcia d' innanzi un velo, che m' ingombrava prima la mente; ed incomincio a veder chiaro qual sia il nodo della difficoltà, e dove stia il punto maschio della quistione. Se così chiara, e limpida da principio si fosse proposta, non si sarebbero moltiplicate tanto le sentenze, e le contese, non si sarebbero alla cieca prodotte tante sperienze, e tanti argomenti, i quali anzi che illuminare la controversia, l' hanno resa torbida, e oscura così, onde sembra aver la più parte camminato dentro ad una densissima notte.

N. Richiamo al presente l' idea, che con una chiarezza maravigliosa ci avete fin dal primo giorno formata dalla forza viva, e veggio, che il punto della quistione a quell' idea avete con industria, e con chiarezza condotto per modo, che se nulla fosse stato scritto intorno a cotali materie, superflui stati sarebbero i ragionamenti delle passate giornate. Voi detto avete non altra esser la forza viva se non quella forza, la quale si concepisce, come posta in mezzo tra l' azione, che la produce, e l' azione, che la distrugge, e serve come di medio termine per comparare l' una coll' altra, e però deve essere all' una, ed all' altra proporzionale. Dunque quello avrà la vera, e giusta misura della forza viva, il quale saprà misurare l' azione, che la produce, o che la distrugge. Perchè in fine essendo la forza viva una cosa giustamente sì, ma sol da geometri conceputa, l' azione essendo cosa della natura, di

que-

questa devesi secondo il buon metodo primamente ricercar la natura.

L. Mi avete levata la riflessione di bocca.

C. Sicchè alla fine sembrami, che altro non si possa, e non si debba concludere, se non se questo, che quando trattisi di rigorosa evidenza, tutti gli argomenti, de' quali fin ora abbiamo parlato, altro in realtà non sono se non mere petizioni di principio. Le ragioni de' Cartesiani dedotte dalla gravità in tanto hanno forza, in quanto suppongono, che l'azione sia proporzionale alla gravità, ed al tempo. Le ragioni de' Leibniziani dedotte dalla gravità, dalle fosse scavate, e dagli elastri chiusi in tanto son valide, in quanto suppongono l'azione esser proporzionale alla gravità, all'elasticità, od alla tenacità, ed allo spazio; e per conseguenza ne' respettivi casi alle fosse scavate, ed al numero degli elastri serrati. Ma la misura dell'azioni non bisogna supporla, bisogna provarla; perchè questo appunto è quello, in che la quistione sta posta.

N. Se alle conghietture un qualche luogo dar si volesse, ne escluderle interamente da' nostri ragionamenti, una ne proporrei di gran forza, che al presente il pensiero mi suggerisce, la quale proverebbe, che l'azione non dal tempo, ma dello spazio debbesi misurare. Io domando, quali sieno quelle quantità, le quali mi proveggono d'un criterio certo per conoscere, se v'abbia azione sì, o nò. La potenza sola nò; perchè questa e coll'azione, e senza azione può aversi. Il tempo, in cui ella stassi al corpo applicata, nò; perchè può una potenza rimaner applicata al corpo per un lunghissimo tempo, anzi per tutta l'eternità senza una minima azione, quando da una potenza contraria sia equilibrata. Ma se la potenza accompagni il corpo per uno benchè picciolissimo spazio, tantosto per me si concepisce l'azione. Dunque l'unico, e vero criterio per conoscere se v'abbia azione, o non v'abbia, lo dobbiam desumere non da ciò, che la potenza stia applicata al corpo per qualche tempo, ma sì bene da ciò, ch'essa accompagni il corpo per qualche spazio. E sarà mai verisimile, che la misura dell'azione si debba prendere dall'elemento del tempo, da cui non si può conoscere, se azione v'abbia, e non dallo spazio, che l'azione infallibilmente dimostra?

L. La riflessione non solamente è ingegnosa, ma ancor robusta.

robuſta. Pur convien confeſſare, che non paſſa i limiti d' una probabile congliettura. Ma avanziamo. Mi ſovviene d'avervi ſin dal primo giorno promeſſo di farvi toccar con mano, che il dottiſſimo P. Boskovik ſuppone, ma non prova, eſſer l' azione proporzionale alla forza morta, ed al tempo, per cui s' eſercita. E perchè veggiate, ch' io non ho a caſo parlato, leggete queſto picciolo paſſo.

C. *Premeſſe tutte queſte coſe ecco alla fine, in che ci accordiamo, e in che diſcordiamo da' Leibniziani, e dagli Antileibniziani Quella azione delle potenze, colla quale vien generata la preſſione, o la celerità, e che noi abbiam chiamata forza delle medeſime, la miſuriamo per l' aggregato di quelle velocità, che ſi generano in ciaſcuna particella, cioè a dire per la maſſa moltiplicata nella ſemplice celerità; nella qual coſa conviene anche il Leibnizio, che così miſura le forze morte. E cotal miſura è aſſai conforme alla ragione. Imperciocchè quando concepiamo generarſi o la velocità, o la preſſione da quell' azione, la quale per un dato tempo continuata produce una velocità a ſe ſteſſa proporzionale, quella azione, che noi per queſto unico fine concepiamo, dallo ſteſſo effetto ſi dovrà miſurare. Noi poi diciamo, ed affermiamo, che nulla altra coſa per quell' azione produceſi ſe non la preſſione, e la velocità.*

L. Se il P. Boskovik non aveſſe altro per fine, ſe non d' impugnar il Leibnizio col Leibnizio, a mio credere entrerebbe in una impreſa meſchina, e da riuſcirvi aſſai facilmente. Due coſe ha inſegnate il Leibnizio, che le forze morte, o per più vero dire le loro azioni ſieno proporzionali alle ſteſſe forze morte, ed ai tempicelli, e per conſeguenza alle maſſe, ed agli incrementi delle velocità; e che le forze vive ſono, come le maſſe ne' quadrati delle velocità. Queſte due propoſizioni ſon così oppoſte, e contrarie, che ogni intelletto mediocre è valevole di moſtrarne una evidentemente falſa colla ſuppoſizione dell' altra. Che ſe poi pretendeſſe eſſere coſa certa, che l' azione ſi miſuri dalla potenza, e dal tempo, e che il ſuo effetto ſia la velocità in tutte le particelle prodotta, mi permetta, ch' io ſchiettamente gli dica, che queſta è una petizion di principio, e che ſuppone ciò, che ha obbligo di moſtrare.

C. Nel principio di quella disertazione sembrami, che lo stesso P. Boskovik dimostri un non so che spettante alla proporzion delle forze morte.

L. Sì bene. Leggiamolo: indi vi farem sopra qualche riflessione.

C. E quanto al primo genere di forze s' appartiene, la misura loro veniva facilmente confermata dagli sperimenti; giacchè se fossero eguali, l' egualità loro dall' equilibrio manifestavasi, e per mezzo della egualità la proporzion loro si deduceva, essendo ineguali; di più discuoprivansi con facile osservazione le velocità nello stesso tempo generate. (*Fig.* 8.) *Nel vertice* B *del piano inclinato* A B *levigato colla maggiore accuratezza sia una carrucola, per cui passi il filo* D B C. *Dall' una estremità del filo penda liberamente il globo* C, *dall' altra due globi eguali della stessa materia* E, D, *parte dal medesimo filo, parte dallo stesso piano inclinato sostentati. Giacchè lo sforzo a discendere per lo piano inclinato l' esperimentiamo minore, che a discender liberamente, sarà facile il ritrovar quella inclinazione del piano, in cui il globo* C *faccia equilibrio colli due* E, D. *In questo caso lo sforzo a discender del globo* D, *eguale a quello del globo* E, *eguaglia la metà dello sforzo del globo* C, *essendo che per l' equilibrio que' due primi eguagliano questo terzo. Se poi tagliato il filo si notino con diligenza le celerità, che nel discendere acquistano i due globi* C, D *nello stesso tempo, si ritroverà la celerità* C *doppia di quella di* D, *cioè nella stessa ragion degli sforzi: la qual conseguenza più generalmente ricaverassi, se in* D *si ponga un qualunque numero di globi eguali, o un globo di qualunque massa: giacchè le velocità discendendo acquistate da ciascuna particella nello stesso tempo saranno, come gli sforzi dedotti dall' equilibrio: la qual cosa e con altri metodi, ed in altri generi di forza puossi sperimentare.*

L. O quì non si pretende di parlar d' altro, che della proporzion, che passa tra le forze morte, o tacitamente si stabilisce la proporzione tra le azioni delle medesime forze morte. Se non si parla d' altro, che della ragion tra le forze morte, la proposizione è verissima, che poste eguali le masse, le forze morte sono, come le velocità generate nel medesimo tempo. Ma questo al nostro intento non monta niente. Per altro si pensa egli, che col medesimo suo progresso formar non possa

una

una somigliante proporzione per rispetto agli spazj, dicendo, che le forze morte, poste eguali le masse, sono, come i quadrati delle velocità generate per ispazj eguali? Poichè se troncato il filo DBC, si notino con diligenza le velocità per ispazj eguali acquistate da' corpi D, C, si troveranno in ragion dimidiata di 1 : 2. Laonde se quattro corpi eguali a D facessero equilibrio con C, e reciso il filo si lasciassero separatamente cadere i corpi D, C per ispazj eguali, si troverebbero le velocità, come 1 : 2, cioè in ragion dimidiata delle forze morte.

Per altro questi due teoremi si possono esporre più generalmente così: le forze morte sono, come le quantità del movimento generate in tempi eguali; le forze morte sono, come le masse, le velocità, e i suoi incrementi, se il moto non incomincia, ed incominciando, come le masse ne' quadrati delle velocità posti gli spazj eguali.

Ha toccato il P. Boskovik alcuna cosa intorno all'egualità delle forze sostenentisi in equilibrio. Ora non è tempo da trattarne, per altro qual sia questa egualità, e da qual più universal principio dipenda, lo dichiareremo a suo luogo.

Se poi pretendesse tale esser la proporzion delle azioni, mi permetta, ch' io gli dica, che urta nella petizion di principio. S' io dicessi, che le azioni delle forze morte, poste le masse eguali, sono come i quadrati delle velocità, perchè le forze morte per ispazj eguali tali velocità producono, onde i quadrati loro sono, come le stesse forze morte, non supporrei tacitamente, che le predette azioni crescessero secondo la porzion degli spazj, e non supporrei ciò, che devo provare? Lo stesso dicasi al P. Boskovik, il quale instituendo un simile raziocinio per riguardo al tempo, suppone, che le azioni crescano secondo la proporzione de' tempi, la qual cosa non suppor vuolsi, ma provare.

N. In somma tutti gli argomenti, tutte le riflessioni fatte da' geometri anche più dotti urtano sempre nello stesso scoglio senza avvedersene. Non si conchiuderà mai nulla nella controversia presente, fin a tanto, che non si rinvenga un giusto metodo per istabilire qual sia la vera misura delle azioni, e se esse debbano esser computate per gli spazj, ovvero pei tempi. Ma quale potrà essere il metodo per entrare in così fatta qui-

ftione, e fu quai principj dovranno le noftre ricerche appoggiarfi?

L. Mettiamo la quiftione ne' precifi fuoi termini. Nei moti accelerati fecondo la dottrina del Galileo due fono le leggi già ftabilite, l'una delle quali riguarda i tempi, l'altra gli fpazj, le quali fi efprimono colle note formule $fdt = mdu$, $fds = mudu$. Qui non fi difputa, ne fi mette in quiftione s'effe fien vere, o nò, convenendo tutti quanti i fifici della lor verità. Si ricerca folo, quale delle due contenga la giufta mifura dell'azione, e per confeguenza ancor degli effetti. Laonde la prefente quiftione trafcende in qualche maniera i limiti della fifica, la quale non altro ricerca fe non la verità delle leggi, ed entra ne' confini della metafifica, la quale dalle molte leggi vere diftingue la principale, feparandola dalle altre, cui noi daremo il nome d'acceffòrie. Quindi effendo certiffimo, che la legge, la quale contiene la giufta mifura delle azioni, e la corrifpondenza tra la cagione, e l'effetto, dee fovra tutte l'altre tener il primato, bifognerà in parte abbandonare il metodo, ed i principj fifici, e la quiftione trattare col metodo, e co' principj metafifici.

C. Come è mai poffibile in una ricerca, dove trattafi di moto, di velocità, di fpazj, di tempi, abbandonare i principj fifici, che fono ftati già dimoftrati, e camminare con piede franco, e ficuro?

L. Non ho detto abbandonare interamente i principj fifici, ma folo in parte: perchè qualunque difcorfo, che non fi fondaffe, e molto più che fi opponeffe a' principj fifici, meriterebbe d'effer difprezzato. Non altro dunque intendo di dire, fe non che bifogna congiungere i principj fifici co' principj metafifici, perchè i primi non fon per fe foli valevoli a terminar la quiftione. Quali fono dunque i principj metafifici, che c' infegnano di feparare, e diftinguere la legge principale dalle acceffòrie? Quella, fecondo i giufti infegnamenti della metafifica dee effer la legge principale, quella contenere la vera mifura delle azioni, e l'egualità trá la cagione, e l'effetto, la quale è fempre mai atta, e valevole di mantenere la ftretta corrifpondenza tra la cagione, e l'effetto, e l'egualità tra due cagioni producenti lo fteffo effetto; la quale è univerfale, ed ha luogo in tutte le circoftanze per riguardo

a quel-

a quelle forze, che si hanno in natura, e che agiscono; alla qual finalmente si riducono l'altre, che sono state in fisica stabilite. Qualunque legge d'alcuna di così fatte proprietà sia mancante, non potrà essere certamente la principale, ma dovrà esser contenta di stare tra l'accessorie.

N. I principj mi piacciono, e son giustissimi, ne potranno non esser certe le conseguenze, che indi derivano. Ma o ch' io son cieco affatto, o che non v'ha maniera da farne l'applicazione. Non avete voi confessato, che le due leggi l' una delle quali riguarda gli spazj, l'altra i tempi, sono verissime, e che della verità loro non controvertesi punto? Se così è, sarà sempre l'una, e l'altra atta a mantenere l' egualità tra la cagione, e l'effetto, e l'una, e l'altra sarà universale, ed avrà luogo in tutte le circostanze. Di più potendosi l'una dall' altra vicendevolmente dedurre, restera incerto qual sia il vero principio, e fondamento dell' altra.

L. Finchè ci fermiamo ne' movimenti diretti (chiamo moto diretto quello, in cui una stessa è la direzione del moto, e della forza; indiretto poi chiamo quello, in cui altra è la direzion della forza, altra quella del moto) finchè dunque ci fermiamo ne' movimenti diretti, il vostro raziocinio mi fa credere fermamente, che ogni nostro tentativo dovrebbe riuscir inutile: perchè in cotal genere di moti, essendo sempre egualmente vera tanto la legge degli spazj, quanto quella de' tempi, saranno amendue dotate di quelle condizioni, che i nostri principj metafisici ci somministrano, o almeno sarà impossibile il distinguere, qual ne sia dotata, e qual ne sia priva. Ma se lasciando da parte i moti diretti, porteremo le nostre ricerche ai moti indiretti, ritroverem forse, che le due leggi non vagliono egualmente, e che v'ha del divario notabile: e questo notato, potrà essere, che i nostri principj metafisici ci discuoprano la legge principale, che ricerchiamo. Eccovi i principj, ed eccovi il metodo, il qual tenendo, abbiamo una buona, e fondata speranza di terminar alla fine una controversia da lungo tempo accesa, e durata senza profitto per molti anni.

N. Il metodo indicato è da tentarsi senza alcun dubbio: ma voi, che ci avete lunga pezza meditato sopra, diteci; cotal metodo renderà soddisfatte le nostre brame?

L. Ab-

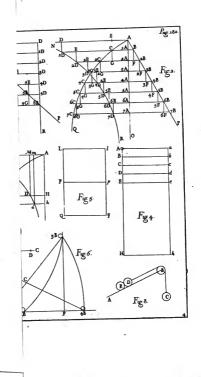
L. Abbiate buona ſperanza. Ma prima di diſcuter le coſe col nuovo metodo, ſarà bene, che trattiamo di due argomenti, che ſi ſono laſciati in dietro.

C. Se ciò far ſi poſſa con iſpeditezza, è bene, che in oggi poniam fine a' moti diretti per venire agli indiretti domani.

N. Signori l'ora è avanzata, ed io ſono per l'applicazione ſtancato: di più domani non mi potrò trattenere ſe non per briev'ora con voi, perchè un intereſſe importante mi chiama altrove. Però, quando non vi ſia grave, poſſiamo domani in un corto, e breve congreſſo de' due argomenti laſciati in dietro tener parola.

L. Queſto ſia per iſtabilito col conſenſo del Sig. Ceſare; ed or poniam fine dopo aver fiſſato il metodo di maneggiar la quiſtione.

GIOR-

Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 8.

GIORNATA SESTA.

INTERLOCUTORI

Lelio, Nestore, Cesare.

L. Siete venuti alquanto più presto delle passate giornate; non crediate, che la materia, di che abbiamo a trattare, abbia a richiedere lungo tempo.

N. La necessità, in che sono, di presto partire, non solo ha me sollicitato, ma m' ha condotto a casa del Sig. Cesare, per lui ancora affrettare. Esso poi, ed io ragionando insieme per via siamo andati investigando quali esser possano quegli argomenti lasciati indietro, di cui in oggi abbiamo a trattare; ed amendue siam convenuti, de' due l' uno esser quello, che vien prodotto dal dottissimo Sig. Musschembroek, di cui il Martini, che per altro il rifiuta, fa un giudicio sì buono, chiamandolo il più forte argomento de' Leibniziani.

C. Se egli è desso, avrò piacere d' udirne il vostro giudicio; giacchè quantunque combattiate per la sentenza del Leibnizio, pure non può sapersi qual cosa de' Leibniziani approviate, e qual nò.

L. La vostra astrologia è stata vera. Di quell' argomento debbo appunto parlarvi, e d' un altro preso dalle corde elastiche, che nel primo tomo de' Comentarii dell' Accademia di Bologna è stato prodotto dal Co: Jacopo Riccati. Avendo riguardo alla fretta del Sig. Nestore incominciamo senza più dal primo. Il Signor Musschembroek seguendo i pensieri del celebre Signor s' Gravesande suo nazionale distingue due generi di forze; altre sono interne al corpo, che è mosso, altre esterne. Per dar esempio delle forze interne egli chiude una calamita dentro la cavità d' una sfera di legno, e questa o sospesa da un filo, o notante nell' acqua la presenta ad un' altra calamita fissa, alla quale sarà portata la palla di legno dall' interna forza di quella calamita, che le sta dentro.

N. Si avrebbe potuto recar in esempio la forza d' un uomo, che stando in barca, e traendo una fune legata coll' altro capo nel lido muove tutta la barca, su cui s' appoggia.

L. Dell'

L. Dell' altre forze, che chiama esterne, infiniti esempli possono addursi, come d'un pendulo, a cui dalla mano dell' uomo vien dato il moto. Fatta questa distinzione intraprende a parlar delle forze esterne. Dunque se un corpo riceva da una potenza esterna un grado di velocità, non sarà più in istato di ricevere dalla stessa il secondo: perocchè tanto il mobile, quanto la potenza sarà dotata della stessa celerità; come a cagion d' esempio, se il mobile riceva dalla mano d'un uomo una data velocità, se la mano dell'uomo si torna a muovere come prima, non gli comunicherà mai il secondo grado, perchè con quella velocità fuggirà il corpo, con che la mano lo segue. Ma se la man dell' uomo fosse prima costituita in un rispettivo riposo per riguardo al corpo, cioè a dire, avesse, siccome egli ha, un grado di velocità, allora facendo lo stesso sforzo comunicherebbe al mobile il secondo grado di velocità: dunque a comunicare questo secondo grado non basta una potenza, ma se ne richiedono due; una che costituisca l'altra in un rispettivo riposo per risguardo al corpo, cioè che le dia un grado di velocità, e l'altra, che lo comunichi al corpo stesso. Similmente a dar il terzo grado di velocità vi vogliono tre potenze; due, che pongano la terza in un respettivo riposo per riguardo al corpo, e l'altra, che agisca; e così si discorra di mano in mano. Premesso così fatto discorso, per cui si manifesta, che trasfondendosi l'energia di tutte le potenze nel corpo, ricevendo egli il primo grado di velocità, ne riceverà uno di forza; ricevendo il secondo, ne riceverà due di forza; il terzo, tre, e così di mano in mano, intraprende l'autore a dimostrare con raziocinio geometrico, che le forze transfuse sono, come i quadrati delle velocità. Ecco il suo discorso, il qual richiede la figura, che formo rozzamente su questa carta.

Nella linea A O (*Fig.* 1.) prendo, quante più mi piace, parti eguali A 1 A, 1 A 2 A, 2 A 3 A ec., le quali dinotino le velocità eguali, che il mobile va successivamente acquistando. Si conduca la linea A P, che faccia con A O qualsivoglia angolo, alla quale da' punti 1 A, 2 A ec. meno le ordinate 1 A B, 2 A 2 B, 3 A 3 B ec., e chiudo i rettangoli 1 A E, 2 A 2 E, 3 A 3 E ec. Se il primo rettangolo 1 A E esprima la potenza comunicante il primo grado di velocità A 1 A, il rettangolo 2 A 2 E doppio del primo, esprimerà la potenza necessaria a comu-

comunicare il secondo grado di velocità 1 A 2 A, e così di mano in mano ciascun rettangolo, come 5 A 5 E dinoterà la potenza necessaria a comunicare il grado di velocità 4 A 5 A: dunque per le cose dette questi medesimi rettangoli esprimeranno le forze trasfuse nel mobile, mentre i nuovi gradi di velocità va acquistando; dunque la forza impressa nel mobile, quando egli ha acquistata la velocità A 5 A, verrà dinotata dalla somma de' nominati rettangoli, cioè dalla figura A 5 A 5 B 5 E 4 E ec. E A, la quale supera l'aja triangolare A 5 A 5 B per tutti li triangoli esterni A E B, B 2 E 2 B, 2 B 3 E 3 B ec., i quali presi insieme sono eguali alla metà dell'ultimo rettangolo 5 A 5 E, cioè dell'ultima potenza; ma l'aja triangolare A 5 A 5 B è in ragion duplicata della A 5 A, cioè della velocità; dunque la somma di tutte le forze trasfuse nel mobile, levando la metà dell'ultima potenza, è in ragion duplicata della velocità.

Ora si diminuiscano i gradi di velocità A 1 A, 1 A 2 A ec. finchè diventino infinitesimi, ed il numero loro fino all'infinito s'accresca, l'ultima potenza diverrà infinitesima per rapporto a tutte le altre, e per conseguenza si potrà trascurare, e farne niun conto; dunque la forza trasfusa nel mobile sarà equivalentemente, come il quadrato della velocità, siccome si dovea dimostrare.

Dimostrato avendo l'autore, che le forze vive, trasfuse nel mobile dalle potenze esterne, sono, come i quadrati delle velocità, deduce, come per corollario, che le potenze interne, le quali sono sempre in riposo per rapporto al corpo, che muovesi, comunicando velocità, che stanno in ragion de' tempi, ovvero in ragion dimidiata degli spazj, infondono forze tali, che serbano la ragion duplicata delle velocità. Ed eccovi esposta colla maggior brevità, e chiarezza possibile tutta la serie della dimostrazione del celebre Sig. Musschembroek.

N Io vorrei saper la ragione, perchè nella serie del ragionamento debbasi seguir un tal ordine di cominciar dalle forze esterne, e di passar poi all'interne, come per corollario; e perchè non si potrebbe in prima disaminare le forze interne, trasferendo poi all'esterne le opportune conseguenze. Seguendo poi questo nuovo ordine, io sospetto, che il metodo ci condurrebbe ad una conseguenza molto diversa da' pensieri

del dotto Olandese. Conciossiachè ritrovandosi la potenza interna sempre in riposo per riguardo al corpo, ch'ella sollecita, ad ogni novella azione deve fare sopra di lui il medesimo sforzo, e per conseguenza trasfondergli lo stesso grado di forza viva; ma secondo la dottrina del Musschembroek ad ogni novella azione si accresce un nuovo eguale grado di velocità; dunque la forza acquistata sarà, come la velocità. La qual conseguenza devesi applicare ancora alle forze esterne, non potendo avvenire, che la forza viva d'un corpo in un caso sia, come la velocità, nell'altro, come il quadrato.

L. Il vostro discorso sembrami più ragionevole di quello del Musschembroek; perciocchè l'azione esercitata dalla forza interna, che è in riposo per rapporto al corpo sollicitato, tutta niente più, niente meno in esso trasfondesi: niente più, perchè non è possibile, che l'effetto riesca minore della sua causa; niente meno, perchè altro effetto non avvi, in cui si trasfonda l'energia della causa. All'opposito non so, se tutta l'azione della potenza esterna trasfonder si possa nel corpo sollecitato. Imperciocchè egli distingue due generi di potenze, la prima, che accresce al mobile un novello grado di velocità; l'altra, il cui ufficio è di costituir la prima in un respettivo riposo per riguardo al corpo sollecitato; e questa è sempre proporzionale alla velocità del corpo. L'azione dell'una, e dell'altra potenza l'autore pensa, che nel mobile si trasfonda. Quanto alla prima non vi sarà controversia tra lui, e me, convenendo io, che quell'azione passa in forza viva; ma quanto alla seconda io non posso assolutamente concedergli, che parte veruna della sua energia passi nel corpo sollicitato. Conciossiachè io vi domando, se altro, che questa potenza non entrasse in azione, si trasfonderebbe nel corpo veruna parte di forza? No certamente per confessione ancora del medesimo Musschembroek. Quando io aggiungo la novella potenza cangio io forse la relazion tra la velocità della vecchia, e del corpo: e come dunque vorrete, che l'azion d'essa si trasfonda nel corpo?

Così per servirmi di quell'esempio, di che si serve l'autore, se dietro ad un corpo, che viaggia colla celerità $= 10$, si muova una mano colla celerità $= 11$, e in lui agisca: quella forza della mano, che corrisponde alla velocità $= 10$, non è pos-

è possibile, che entri in azione contra del corpo, e che in lui si trasfonda, potendosi unicamente trasfondere il residuo della forza, che nella mano risiede. Io ho toccato in questo argomento quel solo, che serve di sufficiente risposta alla ragione del Musschembroek: per altro quando le potenze esterne altro non sieno, che corpi in moto, i quali per mezzo della comunicazione del movimento accrescono velocità ad altro mobile, sarà di mestieri ritornarvi sopra, e trattar la cosa più profondamente nelle seguenti giornate.

C Quantunque voi conveniate col Musschembroek nella final conclusione, che le forze vive sono in ragion duplicata delle velocità; pure in tutto il resto siete così discordi, che sembra, che difendiate sentenze opposite Voi siete d'opinione, che l'azione s'eserciti secondo la proporzione degli elementi dello spazio; egli secondo la proporzione degli incrementi della velocità, ovvero degli elementi del tempo. Voi pensate, che l'effetto dell'azion nascente della forza morta sia il quadrato della velocità generata; egli la semplice velocità. Voi avvisate, che solo si trasfonda nel mobile l'azion di quella potenza, che è applicata a cangiar lo stato del corpo; egli di quella ancora, che costituisce l'altra in un respettivo riposo per riguardo al corpo, che muovesi. Ma intorno a quest'ultima proposizione, nella quale convengo agevolmente con voi, amerei d'intendere una più minuta spiegazion dell'esemplo portato dal Sig s'Gravesande, di cui servesi ancora il Musschembroek.

L. Eccettuata quest'ultima proposizione, in cui con meco convenite, io non dico cosa alcuna risolutamente, ne mai darò per vero ciò, che prima non abbia con ragioni convincentissime dimostrato. Ma esponete ciò, che dice lo s'Gravesande.

C. Sieno infiniti elastri *e*, *e*, *e* ec. (*Fig.* 2) insieme uniti, e congiunti, e tutti chiusi, i quali se apransi, e si dilatino, acquistino quella figura, che viene rappresentata in E. Ciascuno di questi elastri sia infinitamente picciolo, e per uno spazio infinitamente picciolo si dilati. Proprietà degli elastri si è, che nel mentre, che si spiegano, e premono un corpo mobile, gli comunichino tutta la forza, con che si spiegano, purchè dall'altra parte s'appoggino ad un ostacolo immobile. L'elastro E comunicherà al corpo nell'aprirsi un grado di ve-

locità infinitesima. Acciocchè poi l' elastro seguente un egual grado comunichi di celerità, fa di mestieri, che nello spiegarsi si porti con quella velocità, con che viaggia il corpo; perchè altrimenti non potrebbe agire contro il corpo, che già si muove, siccome l' elastro E agisce contro il corpo, che è in quiete. In oltre fa di mestieri, che in così fatto movimento l' elastro translato ad un ostacolo s' appoggi, che dalla parte opposita ceder non possa, cioè a dire deve essere spinto con quella medesima forza, con che l' elastro spinge il corpo; la qual cosa otterremo facendo in guisa, che egli sia spinto da un altro elastro, che similmente si spieghi. Richiedonsi adunque due elastri per comunicar al corpo il secondo grado di velocità; onde è necessaria forza doppia di quella, con che si è il primo grado comunicato. Con somigliante dimostrazione si farà chiaro, che tre elastri, i quali nello stesso tempo si spieghino, ovvero tripla forza richiedesi ad aggiungere il terzo grado di velocità; e così degli altri, dal qual discorso le conseguenze ricavansi, che voi avete poco anzi dichiarate.

L. Sebbene l' economia di cotal movimento seguisse in quella guisa, che è descritta dallo s' Gravesande; pure non accetterei volentieri le conseguenze, ch' egli ricavane; perciocchè, siccome poco anzi v' ho detto, non potrei agevolmente darmi a credere, che quegli elastri, che non hanno altro ufficio, se non di costituire l' elastro agente in un relativo riposo per riguardo al corpo, trasfondano nello stesso corpo l' energia, ed azione loro. Benchè io temo, che nella divisata economia del movimento vi sia dell' equivoco, tanto in se stessa, quanto, s' io non malamente sospetto, per il fine, per cui è portata.

In se stessa; perchè spiegato che siasi l' elastro E, il corpo F ritrovasi in un qualche movimento, sebbene infinitesimo; e i due elastri *e e*, che immediatamente seguono non ne hanno niente; dunque quantunque si lascino in libertà, spiegato che siasi l' elastro E, non è possibile, che ne l' uno, ne l' altro sia costituito in un relativo riposo col corpo. E' dunque necessario, ch' essi alcun poco agiscano, e si aprano alquanto prima d' aver acquistata la velocità, di che è dotato il corpo F; la qual velocità avendo acquistata, potranno entrar in azione, ed accrescer il moto, e la forza del corpo F. Vano pensiero è dun-

è dunque il credere, che un elastro costituisca l' altro in un rispettivo riposo per rapporto al corpo F. Ho permesso, che quando gli elastri abbiano acquistata la velocità, di che è dotato il corpo F, agiscano in lui, e gli accrescano il moto. Ma questo in realtà non si verificherà; perocchè avendo il corpo della velocità, ed essendo d' ogni velocità spogliati gli elastri *e*, *e*, è necessario, che il corpo si separi da questi, e per conseguenza si troverà da essi lontano, quando anche abbiano acquistata la sua velocità. Basta questo per far vedere gli equivoci presi da questo celebre autore; massimamente, che supponendo egli gli elastri di niuna inerzia dotati, non avrebbero gli elastri *e*, *e*, quando non agiscano contro al corpo F, materia inerte, contra di cui esercitare l' energia loro. Per altro supponendo gli elastri d' alcuna materia composti, ovvero supponendo, che a ciascun d' essi sia applicata una picciola sfererta, quanto si voglia infinitesima, bisognerebbe computare dove, e con qual velocità incontrano il corpo F, e quel, che intervenga nell' urto, e nella comunicazione del movimento. Ma queste son ricerche, che non appartengono al nostro affare; onde conchiuderò col dir due parole intorno al fine, che sospetto aver avuto il Sig. s' Gravesande.

Sospetto adunque, ch' egli abbia preteso di dar una idea del modo, con che si produce il movimento da una serie d' elastri applicata ad un corpo. Se ciò fosse andrebbe moltissimo ingannato. Imperciocchè gli elastri componenti una serie, nel comunicar il movimento ad un corpo, non si aprono l' uno dopo l' altro, ma tutti insieme per modo, che mentre le punte del primo, e del secondo elastro, che si toccano fanno uno spazietto, le punte del secondo, e del terzo ne fanno due, quelle del terzo, e del quarto ne fanno tre, e così di mano in mano, onde l' ultima punta verrà ad avere la stessa velocità del corpo sollicitato, siccome abbiam dichiarato alcune giornate sono contro al Sig Martini Nella qual economia di moto si deve avvertire, che quella stessa azione, che si trasfonde nel corpo, cui si da moto, mette le punte degli elastri antecedenti in un rispettivo riposo colle punte vicine de' susseguenti, e l' ultima punta col corpo; giacchè supponiamo non essere gli elastri dotati d' inerzia; perchè se lo fossero, parte dell' azione in essi passerebbe, e non tutta si trasfonderebbe

rebbe nel corpo. Ma questo passi per un sospetto, perchè non vorrei far dire a quel dotto scrittore ciò, ch'egli non avesse giammai pensato.

N. Rimango appagato; onde se il Sig. Cesare non ha cosa alcuna da opporre, possiamo passare all'esame dell'argomento del Co: Riccati.

L. Giacchè il Sig. Cesare col silenzio dà a conoscere, che non ha cosa da opporre, passiamo all'altra dimostrazione; e perchè ella è piena di raziocinj geometrici, ed è esposta dal suo autore per modo, che non se ne può ommetter sillaba, sarà bene, che la leggiamo posatamente, e fermandoci a tempo, e luogo, facciamo quelle osservazioni, che saranno valevoli a metterla in chiaro. Essa comincia da questo Lemma.

C. *Lemma quarto. Da due chiodi A, a (Fig 3, e 4) pendano due corde elastiche AB, ab, e sieno da due pesi eguali stirate; dico, che le distenzioni saranno in proporzion delle lunghezze delle corde.*

Così fatta proposizione è stata dimostrata dal Galileo, dal Borelli, e da Jacopo Bernoulli uomini sommi; ma util cosa sarà aggiugnere una novella dimostrazione alle cose, che dir si devono, vie più accomodata.

Prendasi della corda AB una parte minima AL, a cui venga applicato nel punto L un dato peso P, il quale, distendendo la fibra AL, produca la distensione LM. Parimente nell'altra corda prendasi al = AL, ed appeso in l lo stesso corpo, facciasi la distension lm = LM. Il punto m con un chiodo si fermi, acciocchè la fibra ritirar non si possa. Presa di bel nuovo nella stessa corda la porzione mn = AL, di nuovo agisca il peso P contro alla fibra mn, e nasca la seconda distrazione no = LM, ed il punto o, come prima, con un altro chiodo si fermi. Così ripetendo l'operazione dall'ultima fibra, che porremo esser op, liberamente penda il corpo grave P, e sia pq = LM l'ultima distrazione.

Sforzandosi le due fibre am, mo di ridursi alla prima lunghezza, ed essendo legate a due chiodi a, o, è manifesto, che il chiodo di mezzo m viene tratto in sù, e in giù da due forze eguali, e poste in equilibrio. Similmente mo, oq sono in equilibrio per rapporto al chiodo o; giacchè la prima esercita la stessa forza contro a due chiodi m, o; la seconda contro al chiodo

o, ed

o, ed al corpo sospeso dal punto q, ma con direzioni contrarie. Dunque levati i chiodi m, ed o posti di mezzo, non distruggesi l' equilibrio, ma tutte le cose nello stesso stato immobili rimanendo, non ascenderà, nè discenderà il grave P; *donde raccogliesi, che tante saranno le distrazioni eguali, quante le fibre, e che la distension di tutta la corda a b, la qual' equivale a tutte le distrazioni delle sue parti, sarà alla distrazion d' una fibra* A L, *o di tutte le fibre componenti la corda* A B, *come la lunghezza alla lunghezza; la qual cosa dovevasi dimostrare.*

Corollario primo. Ad ottenere le distensioni delle corde A B, *a b richiedonsi forze, che sieno in proporzione delle lunghezze; giacchè abbiamo veduto, che secondo il numero delle fibre nell' una, e nell' altra corda devesi multiplicare l' azion costante del peso* P *applicata a ciascuna infinitesima particella. Che se le potenze agiscano contro alle corde in qual si voglia altra maniera, come se corpi eguali sospesi da' punti* B, *b discendendo con moto accelerato traessero con seco le corde, e le allungassero, e finalmente dopo varie reciprocazioni si fermassero ne' punti* F, *f sembrami esser evidente, che le forze impiegate nelle distrazioni sono nella stessa ragione; essendo sempre le cause proporzionali agli effetti prodotti, e dovendo ad eguali effetti corrispondere cagioni eguali.*

L. In questo corollario si contiene la base fondamentale della dimostrazione; onde sarà bene fermarci alquanto, e fare qualche opportuna riflessione. Nel modo, onde il Co: Riccati fa distender le due corde A B, *a b*, dividendole in fibre eguali, ed applicando successivamente a ciascuna d' esse il medesimo peso P; ella è cosa evidente, che tante volte si moltiplica l' azione del peso P, quanto è il numero delle fibre nell' una, e nell' altra corda; onde il numero dell' azioni del peso P sarà, come il numero delle fibre, e per conseguenza, come la lunghezza loro; dal che si ricava evidentemente, che la forza impiegata nell' allungarle si è in ragione della lunghezza.

C. Con questo metodo si potrà dunque raccogliere, quanta forza siasi adoprata nell' allungare una corda, cioè tanta forza, quanta eguaglia l' azione del peso P presa tante volte, quante fibre si ritrovano nella lunghezza della corda.

L. Questa conseguenza la credo molto lontana dalla mente del Co: Riccati, nè credo, che per giusto metodo s' inferisca

risca

risca. Mentre alla fibra *al* non ancora distratta si attacca il peso P, questo con moto accelerato discende, finchè prodotta abbia la distension *lm*; ma in discendendo egli acquista nuova celerità, e nel punto *m* si ritrova aver acquistata una velocità infinitesima, e per conseguenza è dotato d'un infinitesima porzione di forza viva; dunque l'azione della gravità si divide in due parti; l'una passa in forza viva nel corpo in movimento, l'altra s'impiega nel vincere la tenacità della corda; dunque non tutta l'azione del peso si adopra nell'allungare la corda, ma parte se ne spende in generar forza viva, la qual forza fa di mestieri, che si distrugga, o per dir meglio in altri effetti si spenda, affinchè il peso si fermi in *m*. Ne crediate per ciò, che venga meno il discorso del Co: Riccati, il quale così procede. Essendo tutte le fibre eguali, e nel distenderle discendendo il peso con moto egualmente accelerato, egual parte dell'azion della gravità s'impiegherà nel produrre la distensione; dunque messe insieme tutte queste porzioni d'azioni, che s'impiegano ad allungar le fibre, si avranno le forze, che hanno così fatte distrazioni prodotte, come il numero delle fibre, o come la lunghezza delle corde.

C. Trasmettasi per vero ciò, che nel corollario letto contiensi, e concedasi, che a produr distensioni proporzionali alla lunghezza delle corde, sieno sempre necessarie forze, che serbino la stessa ragione della lunghezza delle corde; perchè sebbene quì non si fa menzione del tempo, onde cotali distensioni produconsi; pure perchè ho veduto, che l'autore nel fine della dimostrazione accenna qualche cosa del tempo, ci riserveremo per allora così fatta discussione. Proseguiam la lettura.

Corollario secondo. Ma fatta la distrazione, ad impedir la restituzione dell'una, e dell'altra corda basteran pesi eguali, tuttochè le corde sieno di lunghezza ineguale. Ciò riuscirà forse strano a taluno, ma la spiegazion del fenomeno farà più maggiore la maraviglia. Dico pertanto, che il grave applicato nel punto infimo q della corda è sostentato, ed equilibrato solamente dalla metà della forza dell'ultima fibra o q. Restituiti i chiodi ne' luoghi o, m è patente, che la minima fibra o p viene stirata dal solito peso P, e che nello stesso tempo, mentre sforzasi d'accorciarsi, non solamente sostiene il peso P, ma con egual

forza

forza tira abbasso il chiodo o. Similmente la fibra di sopra m n soffrendo la distensione n o con egual forza tira in su il chiodo o, e in giù il chiodo m, e così di mano in mano. Dunque mentre ciascuna fibra esercita la forza elastica per opposite direzioni, l' azion dell' una elide l' azion dell' altra, ed il peso P non è in equilibrio se non colla metà della resistenza dell' ultima fibra o q; purchè le fibre sieno nell' una, e nell' altra corda d' eguale tenacità, non importando nulla a cotal effetto la lunghezza delle corde, sebbene in infinito crescesse.

Corollario terzo. Raccolgo dalle cose dette, che la gravità del peso finito P in riposo è infinitesima; conciossiacosachè vien sostentata dalla metà dell' ultima fibra o q, la quale, essendo una parte inassegnabile di tutta la corda a b, è necessario, che agisca con una reazione inassegnabile. Pertanto la natura non forma equilibrio se non tra le quantità evanescenti, o sia tra gli elementi, e le flussioni delle forze; perciocchè supponghiamo le forze in istato fermo, e costante, e potendosi in luogo di qualunque forza morta un peso sostituire senza distruggere l' equilibrio, e le forze de' pesi in riposo essendo minime, è chiarissimo, che sol tra le forze morte l' equilibrio sussiste. Quindi, se non prendo abbaglio, devonsi correggere il Galileo, ed il Borelli nostri nazionali, i quali avvertendo aver la forza della percossa alla forza di gravità maggior ragione di qualunque data, e supponendo finita esser la forza di gravità, stabilirono infinita esser la forza della percossa. Ma piuttosto la forza della percossa tra le finite volevasi noverare, e la forza di gravità con tutte le altre forze morte, che non vengono corroborate dal movimento, come le forze elastiche, e le pressioni ec. tra le quantità infinitesime collocare.

L. Intorno a questo punto abbiamo nella prima giornata lungamente parlato, onde non è bene ritoccare la stessa corda.

C. *Scolio. Dalla proprietà delle corde elastiche per avventura si può desumere la dimostrazione del fondamental principio della dinamica, che le forze vive cioè sono tra loro, come i prodotti delle masse ne' quadrati delle velocità, non come le quantità del movimento; la qual legge, reclamando quasi tutta la repubblica matematica, benchè di niuna dimostrazione munita fosse, pure pensò doversi stabilire l' incomparabile Leibnizio.*

Teorema. Le forze vive d'uno stesso corpo dotato di diverse celerità non sono, come le velocità.

Alle corde AB, *ab ne' punti* B, *b, si adattino i pesi eguali* FK, *fk. Discenda l'uno, e l'altro corpo a' punti* F, *f fin a tanto che le resistenze delle corde eguali sieno a' predetti pesi; lo che addiviene, quando, descritte le curve delle tenacità* BDK, *bdk, l'ultime ordinate* KF, *kf, e tra loro, e co' pesi sono eguali, e le abscisse* FB, *fb tengono la proporzione delle lunghezze* AB, *ab.*

Fingiamo ora, che non meno il peso BX, *che bx dalla gravità nativa sollicitato, e per niun modo impedito dalla reazion delle corde discenda per gli spazj* BF, *bf, le velocità ne' punti* F, *f saranno in ragion dimidiata degli spazi passati, o de' rettangoli* XF, *xf. Di nuovo discendano i predetti gravi appesi alle corde; le forze acceleratrici ne' punti analoghi* C, *c, saranno eguali, siccome quelle, che vengono determinate dalla forza costante de' pesi* ZC, *zc, sottratte le forze eguali* DC, *dc, cioè le resistenze delle due corde. Per tanto le scale delle forze, che sollecitano i pesi discendenti saranno* BDK, *bdk riferite agli assi* KX, *kx, e le velocità ne' punti* F, *f come le radici quadrate dell' aje* BDKX, *bdkx; ma così fatte aje sono, come le abscisse; dunque le velocità ne' punti* F, *f serbano la ragion dimidiata delle abscisse.*

Ciò posto vuolsi riflettere, che la gravità BX, *o bx, che accompagna i due corpi per gli spazj* BF, *bf agisce parte allungando le corde* AB, *ab, parte accelerando i gravi discendenti fino a' punti* F, *f; ma così fatta forza di gravità di continuo applicata, e non impedita produr potrebbe velocità in ragion dimidiata degli spazj passati, ed impedita dalla tenacità delle corde produce in effetto velocità nella medesima proporzione; dunque se è possibile, che le forze vive sieno, come le velocità, sottraendo le velocità, o le forze generate dalle velocità, o dalle forze, che si sarebbero potute generare da' pesi non impediti, ne seguita, che i residui delle forze, i quali s' impiegano nella distension delle corde, sieno parimente in ragion dimidiata delle linee* BF, *bf, o delle lunghezze* AB, *ab; la qual cosa è assurda, e contraria al corollario primo del nostro lemma. Imperciocchè essendo le distensioni, come le forze tendenti, la forza, che produce la distensione* BF *è alla forza, che produce la bf,* come

come BF *a* bf, *non come* $\sqrt{BF}$ *a* $\sqrt{bf}$; *come doveasi dimostrare*.

L. Voi, Signor Nestore, accennate d'aver non so che da opporre, ne appena potete contenerlo; ma di grazia lasciate compier la dimostrazione, e dopo vi ascolterem volentieri.

C. Corollario primo. Nello stesso assurdo diamo di petto ponendo le forze vive esser proporzionali a qualsivoglia funzione delle celerità, eccettuatane l'unica, ch'esse sieno in ragion duplicata delle velocità. Secondo questa ipotesi la gravità non impedita, agendo per gli spazj BF, bf, *produce forze vive in ragion de' medesimi spazj; di più impedita dalla resistenza delle corde genera forze a' detti spazj proporzionali; e fatta la sottrazione quella forza, che si spende nella distrazione delle corde, mantiene similmente la proporzion delle distrazioni; la qual cosa si è poco innanzi provata vera.*

Corollario secondo. Le forze, che stirano le corde, e vi producono le distensioni BF, bf, *le dobbiam misurare per l'aje* BDKF, $bdkf$, *le quali si trovano esser nella stessa proporzione colle lunghezze delle corde; giacchè le ordinate delle curve esprimono le resistenze crescenti, per vincer le quali in tutti i punti* C, c *si adopra una qualche parte della gravità costante, la quale esprimesi per le ordinate eguali* CD, cd. *Che se la corda* ab *in più particelle dividasi, e ciascuna dallo stesso peso* P *venga distratta, la somma di tutte le forze, che distendon le parti, è precisamente eguale alla forza, che nella corda genera la distra[illegible]one* bf, *siccome cotal distrazione è eguale alla distrazione [illegible] tutte quante le parti. Prenderan per avventura maraviglia quelli, i quali difendono la contraria sentenza, e misurano le forze vive dalle quantità del moto, cioè dai prodotti della massa nella velocità, che io nella fatta dimostrazione non tenga conto veruno del tempo, il qual elemento in così fatte ricerche pensano non potersi omettere senza paralogismo. Ma se non m'inganno a partito, chiarissima cosa è, che nella materia presente, non si dee tener conto veruno del tempo. Perciocchè quando una corda elastica si fa più lunga, non cangiasi la sua resistenza, o in brieve, o in lungo tempo ad una egual distensione pervenga. A vincer poi la medesima resistenza la stessa forza si adopra, o con lento, o con più veloce moto venga dalla mano la corda distratta.*

L. Quì finisce la nuova dimostrazione del Co: Riccati; al presente siete in libertà Sig. Nestore di proporre tutto ciò, che

che v' è in grado; e ben veggio, che si possono muovere molti dubbj.

N. Nel corso di questa dimostrazione, che ora si è letta, evidente cosa si è, che tacitamente supponesi, che la somma delle due forze, l' una delle quali si è acquistata dal mobile al punto F, mentre discende attaccato alla corda A B, l' altra si è impiegata nell' allungare la corda A B, la somma dico di queste due forze eguagli quella, che acquisterebbe il mobile, cadendo con moto libero, e non impedito dalla reazion della corda da B fino in F. Questo sembrami, che sia un supporre ciò, che è in quistione; perciocchè i Cartesiani, che prendono l' azione secondo la misura del tempo, vi diranno, che le due forze eguagliano quella, che il mobile acquisterebbe discendendo con moto libero nello stesso tempo, in cui con moto impedito dalla reazion della corda viene da B in F. Vedete, che contra di voi adopro quell' arme, di che m' avete fornito.

L. La difficoltà è sottile, e piena d' ingegno, e a dirvi il vero a me pure si è presentata di botto, e mi ha messo in credenza d' aver trovata la parte inferma della premessa dimostrazione. Ma una seria meditazione mi ha dato a divedere essere poco ferma la difficoltà. E per farlo conoscere ancora a voi, fa di mestieri, che ritroviamo la proporzione de' tempi, ne' quali i mobili, allungando le corde, arrivano a' punti F, *f*. Essendo le scale delle forze sollicitanti B D K, *b d k* analoghe all' abscisse, cioè a dire divisi i due assi X K, *x k* proporzionalmente ne' punti Z, *z*, essendo le ordinate esprimenti le dette forze eguali, di più essendo eguali le masse, i tempi, ne' quali si scorrono gli spazj, B F, *b f* saranno in ragion dimidiata de' medesimi spazj. Se ne volete la dimostrazione, l' avete in questa stessa disertazione del Co: Riccati al lemma terzo, e suo corollario. Ma due mobili eguali discendenti con moto libero acquistano velocità, che sono in ragion de' tempi; dunque i due mobili, discendendo liberamente ne' tempi, in cui si allungano le corde A B, *a b*, acquistano velocità, che sono in ragion dimidiata delle rette B F, *b f*; ma nella stessa ragione sono le velocità acquistate ne' punti *F*, *f*, mentre i mobili discendono impediti dalla reazion delle corde; dunque in questa ragion sarebbero ancor le forze, se si misurassero dalle velo-

loci-

locità; dunque sottraendosi le forze, che sonosi acquistate, non ostante la reazion delle corde, da quelle, che si sarebbero acquistate con libero movimento, rimarranno i residui nella stessa ragion dimidiata di BF, *bf*, ovvero delle lunghezze delle corde AB, *ab*; ma questi residui esprimono le forze impiegate ad allungare le corde; dunque così fatte forze sono in ragion dimidiata delle loro lunghezze; la qual cosa è contraria al principio del Co: Riccati. Lo stesso seguirà nella supposizione, che le forze sieno, come qualunque altra funzione delle velocità, se si eccettua il quadrato; dunque ec.

N. In questa particolar ipotesi, ancorchè si supponga, che la gravità eserciti azioni eguali in tempi eguali, la cosa torna a vantaggio del Leibnizio. Ma sotto la vostra scuola ho appreso, che non bisogna pronunciar una conclusion generale appoggiandosi sopra una particolar verità, essendo questo fonte di molti errori. Però se ne avete il metodo, trattate cotal teoria generalmente, e forse non reggerà l' ultima conclusione per voi dedotta.

L. Avete ragione, e pensate bene. Vi dico pertanto, che prese tutte le cose a norma delle regole Leibniziane nasceranno tutte le conseguenze giustissime. Di più supponendo ancora, che debbansi prender le forze de' corpi discendenti in tempi eguali, si salverà il principio del Co: Riccati, misurando le forze per lo quadrato della velocità nella massa, non già misurandole per la quantità del movimento. Eccovene il calcolo, il quale non è difficile.

Primamente io prendo a considerare due corde di qualsivoglia lunghezza, e formate dall' union d' altre corde di egual diametro unite insieme, e semplicemente accostate; le lunghezze loro le chiamerò N, *n*; il numero delle corde eguali, che le compongono R, *r*, e per non andar in lungo questo numero lo chiamerò la loro grossezza. Or egli è indubitato, che ad allungar cotali corde per modo, che tutte le fibre eguali in lunghezza, ed in grossezza sieno egualmente stirate si richiedono forze, che sieno, come i numeri delle nominate fibre eguali, cioè in ragion composita delle lunghezze, e grossezze delle corde. Questa verità si dimostra col metodo del Co: Riccati, e si vede chiara. Ciò posto premetto il seguente

LEM-

LEMMA.

Se due corpi vengano sollicitati da forze, che sieno rappresentate dall'ordinate di due curve analoghe all'absciffe, ed all'ordinate, nelle quali cioè, mentre le absciffe crescono secondo una ragion data, le ordinate crescano, o calino in un' altra ragion data, io dico, che le velocità ne' punti analoghi saranno in ragion dimidiata diretta delle absciffe, e dell' ordinate, e reciproca delle masse.

Sieno due curve B D K, bdk, in cui prendendosi le absciffe X Z, xz in ragion delle costanti X K, xk, le ordinate Z D, zd sieno in ragion costante delle X B, xb: e vengano due mobili sollicitati per le absciffe X Z, xz da forze, le quali sieno, come le ordinate. E' noto, che le velocità ne' punti analoghi Z, z sono in ragion dimidiata delle aje X B D Z, $xbdz$, e reciproca dimidiata delle masse, che diremo M, m. Ma le predette aje sono in ragion composita di X K: xk, e di X B: xb. Conciossiachè prese Z V, zu infinitesime in ragion delle absciffe, gli elementi degli spazj V D, ud saranno in ragion composita di Z V : zu : : X K : xk, e di Z D : zd : : X B : xb; dunque chiamando la ragione di X K : xk : : N : n, e di X B : xb : : R : r, sarà la velocità nel punto Z a quella nel punto z : : $\frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}}$.

Corollario. I tempicelli per Z V, zu sono, come gli elementi Z V, zu, ovvero come N : n direttamente, e reciprocamente, come le velocità; dunque i detti tempicelli saranno come $\frac{N\sqrt{M}}{\sqrt{RN}} : \frac{n\sqrt{m}}{\sqrt{rn}} : : \frac{\sqrt{NM}}{\sqrt{R}} : \frac{\sqrt{nm}}{\sqrt{r}}$: la qual proporzione, poichè è costante, passerà ancora tra i tempi interi.

Premesso questo lemma, io considero le due corde A B, ab, alle quali sospendo due corpi B, b, di qualsivoglia massa M, m, ma le cui gravità sieno proporzionali alle grossezze delle corde. Egli è chiaro, che prendendo B C, bc proporzionali alle lunghezze delle corde, le rette D C, dc, che rappresentano le tenacità, saranno, come le grossezze loro; dunque le scale delle tenacità saranno due curve analoghe all' ordinate, ed all' absciffe. Sieno B X, bx i pesi de' corpi, e si chiudano i ret-

i rettangoli XF, *xf*, e si producano DC, *dc* in Z, *z*. Essendo ZC, *zc* le gravità; DC, *dc* le tenacità, saranno ZD, *zd* le forze sollicitanti, mentre i mobili discendono impediti dalle tenacità delle corde: ma queste saranno sempre nella ragion data di ZC : *zc*, ovvero di XB : *xb*; onde anche per rapporto agli assi KX, *kx* le curve sono analoghe tanto alle abscisse, quanto alle ordinate; dunque le velocità ne' punti F, *f* saranno tra loro, come $\frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}}$: e però le forze vive ne' medesimi punti saranno secondo il Leibnizio, come RN : *rn*.

Ma se gli stessi mobili discendano liberamente per gli spazj BF, *bf*, acquisteranno velocità, e per conseguenza forze vive nella stessa ragione; dunque sottraendo le prime dalle seconde, le residue staranno nella stessa ragione di RN : *rn*: ma queste residue son desse, che producono le distensioni BF, *bf*; dunque camminando col metodo leibniziano, si ritrovano le forze producenti le distensioni in quella ragione, che abbiam provato dover avere.

Ma se porremo, che i mobili discendano liberamente in tempi eguali a quelli, ne' quali impediti dalle corde, discendono per gli spazj BF, *bf*, ritroveremo, che le velocità acquistate dopo tai tempi sono come $\frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}}$; giacchè chiamati questi tempi T, *t*, sarà RT : *rt* :: MV : *mu*; ma T : *t* :: $\frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}} : \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}}$; dunque $\frac{R\sqrt{MN}}{\sqrt{R}} : \frac{r\sqrt{mn}}{\sqrt{r}}$ :: MV : *mu*, o sia $\frac{\sqrt{RN}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{rn}}{\sqrt{m}}$ :: V : *u*.

Ciò posto, le forze vive prese alla foggia de' cartesiani sono, come $\sqrt{RMN} : \sqrt{rmn}$: da cui sottratte forze, le quali sieno parimente, come $\sqrt{RMN} : \sqrt{rmn}$ (giacchè tali sono le forze cartesiane acquistate da' mobili discendenti coll' impedimento delle corde) resteranno le forze, che prodotte hanno le distensioni nella stessa ragione di $\sqrt{RMN} : \sqrt{rmn}$; lo che è contrario al principio.

Che se prendonsi alla foggia de' leibniziani, saranno le forze

forze vive dei corpi diſcendenti liberamente, come RN : rn; dei corpi diſcendenti coll' impedimento, come RN : rn; dunque le reſidue producenti le diſtenſioni ſono nella ſteſſa ragione; lo che col principio ſi accorda.

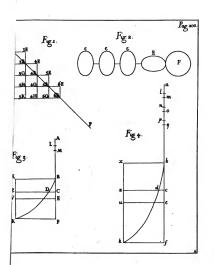
C. Queſto argomento ha dunque più forza, che non ſembrava al principio: ne veggio, come ad eſſo accomodar ſi voglia la riſpoſta data agli altri.

L. Tutta la ſua forza dipende dal principio, che le forze neceſſarie ad allungar le corde per modo, che tutte le fibre ſieno egualmente ſtirate, ſono, come il numero delle fibre, ovvero in ragion compoſita delle lunghezze, e groſſezze loro: la qual propoſizione è evidentiſſima in tutte e due le ſentenze, qualora diviſe le lunghezze delle corde in particelle eguali a ciaſcuna d'eſſe, ſi ſoſpende un peſo in ragion delle groſſezze; perchè in tal caſo eſſendo non meno i tempi, che gli ſpazj, come le lunghezze delle corde, e le forze morte, come le groſſezze, le forze impiegate verran ad eſſere in ragion compoſita delle lunghezze, e delle groſſezze. E quantunque ſia molto naturale, che la ſteſſa forza richiedaſi in qualunque maniera, ed in qualſivoglia tempo le corde ſi allunghino: pure que', che riconoſcono l'azion della forza morta proporzionale alla forza morta, ed al tempo, non debbono per vero riceverlo, e a dire ſchietto, ciò fa di meſtieri non ſuppor, ma provare.

Nel caſo noſtro eſſendo i tempicelli, come $\frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{R}} : \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{r}}$, le forze morte, come R : r, ſaranno le azioni elementari, come $\sqrt{RMN} : \sqrt{rmn}$; la qual ragione eſſendo coſtante, ne viene, che le azioni intere impiegate nel diſtender le corde ſaranno nella ſteſſa proporzione: ed in queſta proporzione generalmente ſi trovano ſeguendo il metodo del Co: Riccati, e prendendo le forze vive de' corpi diſcendenti con moto libero generate non per iſpazj, ma per tempi eguali a quelli, in cui diſcendono coll' impedimento delle corde.

C. Ho inteſo perfettamente. Queſto argomento, che in ſomma è tutto parto della mente del Co: Riccati, ſembrami non molto diſſimile da quello del Sig. Giovanni Bernoulli; perchè un elaſtro, che ſi chiuda, fa lo ſteſſo, che una fibra, che ſi ſtiri; ed in fatti in luogo degli elaſtri bernoulliani ſi potrebbero

ſurro-

Pag. 200.
Fig. 1.
3E
3F
4E
3G
4F
5E
3H
4G
5F
6E
3K
4H
5G
6F
P
Fig. 2.
c
c
c
E
F
Fig. 3.
A
L
M
K
B
Z
D
C
V
E
K
F
Fig. 4.
a
l
m
n
o
p
q
x
b
z
d
c
u
e
k
f

surrogare le fibre elastiche del Co: Riccati, e all' opposito:

L. Quantunque io convenga, che salva la forza degli argomenti si può usare così fatta sostituzione; pure massima è la differenza tra l'uno, e l'altro argomento. Perocchè il Signor Bernoulli non altra forza adopera, che l'elastica, e considera la forza generata da più elastri, che si spiegano, o distrutta da più elastri, che si serrano. Laddove il Co: Riccati congiunge la forza di gravità coll' elastica, e lasciando cadere un corpo grave sospeso da una corda, esamina, quanta forza siasi impiegata nella distrazione, sottraendo quella, che si è generata da quella, che prodotta sarebbesi con libero movimento.

N. Ne comprendo bene la differenza; e però non rimanendo cosa alcuna alla perfetta discussion delle cose, che ci eravamo proposte in questa giornata, prenderò subitamente licenza, perchè il mio affare m'aspetta, ne vorrei pregiudicarmi colla tardanza.

GIORNATA SETTIMA.

INTERLOCUTORI.

Lelio, Nestore, Cesare.

N. SAppiate, Sig. Lelio, che il Sig. Cesare si ritrova poco contento, sembrandogli, che dopo tanti ragionamenti siasi conchiuso poco, o nulla, e che la controversia rimanga nell' incertezza di prima.

C. Poco contento no, perchè delle cose dette son persuaso; ma sembrami certo, che abbiam ottenuto pochissimo; perchè non si è fatto altro fin ora, che distruggere, e gittar a terra tutti gli edificj, che sono stati innalzati per l'addietro da uomini ancor grandissimi. Stimo poco il distruggere, quando non si pensi ad edificare.

N. E pure soventemente una delle maggiori cure dev' essere di distruggere il già fatto; perciocchè tanta è la confusione de' piani, l' irregolarità della pianta, la debolezza de' fondamenti, che non è possibile d' innalzar una buona, e ben ordinata fabbrica, se non si atterra onninamente la vecchia.

L. Lasciando le metafore da un lato, per quel che l' opinioni riguarda, asseverantemente io dico, che spessissime volte la maggiore, e la più utile opera è quella di mostrare non sussistente tutto ciò, che è stato scritto da altri, e di fissare il giusto metodo, con che vuolsi maneggiar la quistione. Conciossiachè accade non di rado, che s' entra nella ricerca con qualche notabile, ed universal pregiudicio, col quale non è possibile di pensar bene, e di produr cose, che si avvicinino al vero. Tutte le meditazioni, e gli argomenti, che s' espongono al pubblico, comechè ad alcuni piacciano, pure perchè portano con seco alcuna cosa, che opponesi al naturale, trovano contraddittori ancor tra uomini di scienza profonda. La controversia per le molte cose, che scrivonsi dall' una parte, e dall' altra rendesi celebre nel mondo colto. Quindi non v'ha uomo, che abbia, o si creda avere scienza, e letteratura, il quale non voglia a così fatta quistione rivolgere i suoi pensieri. Gli uomini mediocri non altro fanno, che di confondere

dere maggiormente le idee, e spargere ogni cosa d'oscurità. Gli uomini profondi o non vi pensano seriamente, o non veggon quanto sarebbe mestieri. Il tutto vie più s' inviluppa, e s' intrica; onde col legger le innumerabili scritture al pubblico uscite, non solo non si riceve alcun lume, che anzi si va formando nella mente sempre più densa, ed oscura la notte. Pensate voi, che potremo mai uscire da cotal' incertezza, se non distruggansi interamente le cose scritte, scuoprendo gli equivoci, mostrando i falsi principj, ed allontanando gli inveterati pregiudicj; e se non si mettano in chiaro i veri, e fecondi principj, e non si stabilisca il buono, e spedito metodo d' entrare nella ricerca con fondata speranza di rinvenire la verità? Potrei a questo proposito far pompa di moltissimi esempj, de' quali abbonda la fisica, poichè il prisco suo splendore le è stato restituito; ma sarò pago d' un solo. Ditemi in grazia, quale è la vera cagione, perchè è stata ignota per tanti secoli la vera origine delle fontane, e de' fiumi; quantunque siensi multiplicate a dismisura le opinioni, e le sentenze, ne vi sia stato per dir così filosofo, che non abbia speso in questo affare lunghe, e faticose meditazioni?

N. Io dirò quel che sento, poichè me lo domandate. La più parte si è assisa al tavolino con persuasione fermissima, che le pioggie, e l'altre acque, che in qualunque maniera cadon dall'alto, non fussero sufficienti a provvedere a' fiumi dell' immensa copia dell'acque, che portano al mare. Con tal presupposto avvisarono esser d' uopo di chieder soccorso al mare, cui l acque mancar non possono, e di far passare l'acqua marina per ciechi, e sotterranei condotti all'alte cime de' monti. L'impresa era ardua, e difficile, per non dire impossibile, perchè vi s' opponevano due grandissime difficoltà; la prima di liberar l'acqua marina dai sali; l'altra di far salire a cotanta altezza l'acqua dotata di gravità. Non potendosi in così fatte investigazioni tener dietro a' fenomeni, i quali anzi sembravano di mostrar l'opposito, si è abbracciato il solito, ma meschino rifugio dell'ipotesi. Si son sognati nel fondo del mare filtri, che fossero atti a trattener i sali per modo, che da essi non venissero gli angusti canaletti turati; si sono finti condotti, che portassero l'acqua sin sotto le radici de' monti più mediterranei. A sollevarla poi, chi è ricorso alla gravità

specifica dell'acqua salsa maggiore, che della dolce; chi ha fatto uso della proprietà di tubi capillari, ne' quali ascendono spontaneamente i liquori; chi ha convertito i monti in lambichi, accendendo sotto d'essi un attivo fuoco; e chi in una maniera, e chi in un'altra pensando, e sempre mai allontanandosi dalla verità, sonosi le opinioni multiplicate, ma non rischiarata la controversia.

L. E in cotanta diversità d'opinioni, e di pensamenti si sarebbe mai la quistione decisa, e messa nella sua luce, se non si fusse fatto vedere esser insussistenti tutte queste sognate ipotesi, ed esser prima necessario di certificarsi, se vera fosse la supposizione, che le pioggie non erano bastanti a somministrar a' fiumi l'acque, di che vanno gonfii? Non si sarebbe ancor nell'incertezza di prima, se stabilito non si fosse, che il vero metodo di entrare nella ricerca era di misurare la quantità dell'acque, che cadono dalle nubi, e che sono scaricate in mare dai fiumi?

N. Senza fallo. E di fatto, tosto che si cominciò a metter all'aperto de' vasi cilindrici per aver l'altezza dell'acque cadenti in pioggie, ed in neve, a pesare a un di presso la quantità de' vapori, che in un determinato tratto di mare in aria son sollevati, a misurare la copia dell'acque, che per un fiume nel mare vengono scaricate, a considerar con occhio attento l'interna struttura delle montagne, la ricerca cangiò interamente aspetto, e di sì bella luce d'improvviso sparsa si vide, che la più parte de' migliori filosofi giudica esser evidentemente dimostrato, che le fontane, e i fiumi debbon l'origin loro unicamente all'acque, che discendono dalle nubi.

C. Non è però, che così fatta sentenza, comunque io la reputi dimostrata, non abbia, chi le contraddice, e l'impugna. Ma questa sembra una fatalità, che se con metodo sicuro, e facile si discuopre una verità, sopra di cui prima non erasi meditato, tutti se ne allegrano, e concordemente l'abbracciano; all'opposito se prima insorte sieno molte controversie, e notabili diversità d'opinioni; sempre avvi, chi se ne attrista, e a più potere s'arma per farle guerra. Io giurerei, che se mai nell'addietro non si fosse all'origine delle fontane pensato, dopo le sperienze, e l'osservazioni fatte in Francia, in Inghilterra, e in Italia non vi sarebbe filosofante, che non la riferisce all'acque piovane.

L. Se

L. Se così è, siccome nella ricerca dell'origin de' fonti non dobbiam giudicare, che sieno indegni di lode que' primi, i quali, dando esilio a tutte le ipotesi fin allora immaginate, il nuovo metodo stabilirono, con che dovevasi la quistione trattare: così nella materia delle forze vive non mi pare, che abbiamo conchiuso poco, mentre abbiam dato a divedere il perchè non sieno concludenti le ragioni usate fin ora, cioè perchè tacitamente supponevasi, e non provavasi la misura delle azioni; mentre abbiamo stabilito il metodo, ed i principj, onde sperasi di trarre dalle tenebre alla luce la verità. E se molte giornate in questo abbiamo impiegate, non credo, che dobbiate accusarci d'aver perduto il tempo inutilmente.

C. Io crederò, che fruttuosamente sarannosi per noi spese l'ore, quando, dopo aver distrutto il mal fatto, ci riuscirà col metodo, e co' principj indicati di fabbricare una vera, e ben fondata teoria; siccome fecero quelli, che dell'origine delle fontane trattarono, i quali colle osservazioni hanno la verità manifestata.

L. Sebbene io non avessi forze per tanto, pure colle riflessioni de' dì passati mi pregerei d'aver aperta agli ingegni speculativi la strada, e sgombratala da mille intoppi, de' quali era nel tempo addietro gremita. Non ostante dopo aver atterrato tutto ciò, che è stato scritto fin al presente, mi studierò usando de' principj, e del metodo divisato di trar fuori delle tenebre una verità, che, non ostante le diligenti ricerche, è stata fin or nascosa, e sepolta. Ma poichè il buon metodo, ed i veri principj non si adopran se non dopo infinite dispute, io veggio, che molti non acconsentiranno alle cose, ch' indi discendono, anzi con ogni nerbo si sforzeranno d'abbatterle: essendo impossibile, che gli invecchiati pregiudicj tostamente dalla moltitudine con docilità si depongano. Ma se avrò avuta la buona sorte di pensar bene, saranno inutili gli sforzi contrarj degli ingegni ancor più sublimi; perchè più d'assai vale un uomo mediocre, che difenda la verità, che cento acutissimi, i quali, per traveder, la combattano. La verità, vedete, alla fine trionfando di tutte le opposizioni, siccome Donna viene riconosciuta da tutto il mondo.

Ma dando incominciamento alla nostra impresa, mettiamoci sotto degli occhi la teoria delle forze composite, ed esaminia-

miniamo, se ad essa i principj di già fissati raccoglier possano veruna conclusione, onde si manifesti la verità. Ditemi quale è, o Signori, la legge delle forze composite ricevuta universalmente da tutti?

C. Il Teorema si è il seguente, che se due forze unitamente sollicitanti un corpo vengano espresse pei lati d'un paralellogrammo, la forza equipollente viene espressa dal diametro dello stesso paralellogrammo. Dal qual principio ne nascono altri due, che prendono il nome di composizione, e di risoluzion delle forze, cioè che in luogo di due espresse pei lati d'un paralellogrammo se ne può sempre sostituir una terza espressa per lo diametro, all'opposito in luogo d'una due se ne possono sostituire, purchè sieno i lati d'un paralellogrammo, di cui la data sia diagonale. E questo è ammesso senza eccezione da chi che sia.

L. E di quanto avete sin or avanzato, avvi dimostrazione sicura?

C. Non ve n'ha dubbio. Il Newton, l'Ermanno, il Varignon ne recano una prova sicura presa dalle velocità, che in egual tempo le due forze producono, e così riducono la composizion delle forze alla composizione del movimento. E quando questa prova non vi piacesse, ne dedurrei la dimostrazione dal principio della meccanica, di cui si valsero gli antichi, che due forze perpendicolari alle braccia del vette fanno equilibrio, quando sono in ragion reciproca delle distanze dal centro di sospensione.

N. Pensate voi, che il Sig. Lelio veracemente dubiti del principio della composizione, e risoluzion delle forze. Egli ci va con gentilezza tentando, e fa benissimo, che il Sig. Daniello Bernoulli nel primo tomo degli atti di Pietroburgo lo dimostra adoprando soli principj metafisici, e di evidenza somma forniti.

L. Giacchè avete sospetto, che io vi tenti, permettete, che di tentarvi io prosegua. Non è egli un principio di metafisica evidenza, che deve esservi sempre mai corrispondenza tra la cagione, e l'effetto, e che questa negata non v'ha criterio alcuno, onde conoscer l'energia delle cause, ed il valor degli effetti. Se questo è, come potrete mantenere questo principio nella composizione delle forze. Le due forze late-

rali

rali si vogliono considerar, come causa, la forza diagonale, siccome effetto. E chi non sa, che i due lati di qualsivoglia paralellogrammo sono sempre maggiori del diametro? Dunque la cagione è maggior dell'effetto.

N. A così fatta difficoltà ho pronta la risposta senza porr' eccezione al principio metafisico dell'egualità tra la cagione, e l'effetto, per lo quale è necessario di prender la cagion piena, e l'effetto pieno. Ma l'effetto pieno non è la sola forza diagonale; perciocchè le due forze laterali in parte s'oppongono, e contrastano, l'una dell'altra impedisce l'energia, e l'intero effetto. Aggiungete così fatto impedimento alla forza diagonale, e non ritroverete più disuguaglianza alcuna tra la cagione, e l'effetto.

L. Non v'ha risposta, che abbia maggiore specie di verisimiglianza di questa; e a bello studio io ho fatta parola della sola composizion delle forze per darvi agio di produrla. Ma se passiamo alla risoluzione, la forza diagonale genera le due laterali, e quella è la causa, queste due son l'effetto; dunque l'effetto è maggior della causa. E quì osservate, che gli impedimenti possono bensì fare, che la causa, non oprando con tutta la sua energia, produca un effetto minor di se stessa, ma non possono far giammai, che di se stessa maggiore produca l'effetto, dovendosi secondo il vostro avviso, come parte dell' effetto, considerare il contrasto degli impedimenti.

C. In una dissertazione non ha molto stampata in Brescia, trattandosi incidentemente di questo affare, non si fa intendere, come l'opposizion delle forze laterali sia valevole di salvare l'egualità tra la cagione, e l'effetto nella composizione, e non lo sia egualmente nella risoluzione. Perciocchè egli è verissimo, che nella composizione le potenze laterali son causa, nella risoluzion son effetto; ma siccome nella composizione quelle parti delle forze laterali, che oppongonsi, non si devono computar nella causa, così nella risoluzione non si vogliono computar nell' effetto; e non computandosi si mantiene e nell'un caso, e nell'altro l'egualità tra la cagione, e l'effetto.

L. Comunque l'autore della dissertazione citata sia un uomo degnissimo, e di molto valore, pure in cotal proposito la sua ragione non mi convince. Conciossiachè nella composizione le

ne le parti delle due forze laterali, che si oppongono, perciò non si vogliono metter a computo nella causa, perchè elidendosi l'una coll'altra, e impedendosi vicendevolmente d'agire, atte non sono a produr effetto di sorte alcuna; onde le parti residue, che non si oppongono, unicamente trasfondono l'energia loro nell'effetto, cui debbono esser eguali. Ma cotal ragione non si può accomodare alla risoluzione; perocchè non intesa la forza diagonale, niuna parte intender si può delle forze laterali, ne quelle che si oppongono, ne quelle, che non si oppongono; dunque non meno le une, che le altre vengono dalla forza diagonale prodotte; altrimenti sarebbero prodotte dal nulla; dunque e le une, e le altre sono vero effetto della forza diagonale; dunque l'effetto è veracemente maggiore della sua causa.

Ma giacchè l'esposto raziocinio interamente si fonda nell' opposizione delle potenze, che direte, se io cangerò le potenze laterali per modo, che di opposte in parte divengano interamente cospiranti?

C. Dirò, che farete quello, che al presente mi sembra impossibile.

L. L'artificio non è difficile: e per usare di maggior chiarezza mi servirò d'un esempio semplice, e piano. In mezzo ai due piani inclinati F B, G B (*Fig.* 1.) constituisco un corpo sferico C, che li tocchi ne' punti D, E. Menati dal centro della sfera a' punti del contatto i raggi C D, C E, si conduca il raggio verticale C A, il quale rappresenti la gravità della sfera. Dal punto A si menino le rette A M, A N parallele ai raggi C E, C D. E' noto, che la gravità C A si risolve nelle due C M, C N, colle quali il corpo sferico preme i due piani. Di queste forze C M, C N provenienti dalla gravità C A si dice, non esser effetto maggiore della sua causa; perchè, essendo in parte contrarie, ed opposite, non si devono metter a computo quelle parti, che contrastano, e vicendevolmente impedisconsi. Ma io m'accingo di mutare le predette forze di contrarie in cospiranti, la qual mutazione fatta non so, come si potrà far uso della risposta.

Prodotto il raggio A C in H per lo punto H nel piano delle rette D B, F B, conduco la tangente F H G, la quale concorra colle B D, B E ne' punti F, G. E' noto per la pro-
prie-

prietà delle tangenti il circolo, che FH eguaglia FD, e HG eguaglia GE. Laonde fatto fulcro ne' punti F, G, costituisco due vetti di braccia eguali DFH, EGH, e posto un sostegno in O, il quale impedisca il moto de' due vetti, vi colloco, come sopra, in mezzo la sfera. Poste tutte queste cose, la gravità CA della sfera C si risolve nelle due CM, CN, le quali in parte sono contrarie; dunque il punto D vien premuto colla forza CM, la quale è normale al braccio DF; dunque il sostegno O dall'altro estremo punto H del vette premuto viene con una forza eguale a CM: similmente dimostrerò, che lo stesso sostegno vien premuto dall' altro vette EGH con una forza eguale a CN: le quali due forze prementi il sostegno, non sono più in parte contrarie, ma cospiranti del tutto. Or io la discorro così. Non meno le due forze CM, CN, che le due forze prementi il sostegno, provengono dalla gravità della sfera: ma le due forze cospiranti, prementi il sostegno, non si possono per mezzo dell'opposizione ridurre ad egualità colla forza CA; dunque ancor per rispetto alle forze CM, CN, è affatto vano all'opposizione ricorrere.

C. La forza delle vostre ragioni mi ferma. So, che avvi parecchi autori dottissimi, come il Sig. de Mairan, il Sig. Martini, ed altri, a' quali non sembra assurdo il dire, perchè lo dicono, che per la risoluzione la quantità delle forze è accresciuta, per la composizion minorata. Ma se questa risposta non vi gradisce, gradite almeno quella dell' ingegnosissimo P. Boskovik, il quale avvisa, che in natura non mai si dia risoluzione di forze, ma sempre composizione; e che la prima non altro sia, che una maniera d'argomentare, onde noi ricaviamo le dimostrazioni, non una operazione della natura.

L. Quanto alla prima: con buona pace di tutti gli scrittori, che avete citati, di cui per altro serbo un' altissima stima, io vi rispondo, che mi sarà sempre sospetta un' opinione, che non serba la necessaria corrispondenza, ed egualità tra la cagione, e l'effetto. Quanto alla seconda, io vi confesserò ingenuamente, che non l'intendo, sembrandomi, che la natura egualmente della composizione si serva, che della risoluzion delle forze. Nell' esempio addotto testè, il corpo posto in mezzo ai due piani, o al due vetti, non li preme con due pressioni, che tutte interamente provengono dalla gravità; e

questa rimossa, quelle pure non mancherebbero? Dunque la sola forza di gravità ne genera due; e questo non è un puro modo d'argomentare, ma una vera operazione della natura. Dunque si ha in natura la risoluzion delle forze, che in fine non vuol dir altro, se non che da una sola forza ne nascon due.

Ma per farlo con un altro esempio veder con chiarezza. Sieno (*Fig.* 2) fermamente attaccate a' chiodi A, B, C tre corde elastiche. Supponghiamo, che CE sia nella natural sua distensione, e che AE, BE sieno egualmente stirate. In questo caso le due forze AE, BE insieme distendono la corda CE, e col distenderla, producono una forza novella. Ecco la composizion delle forze. All'opposito sieno le corde AD, BD nella sua distension naturale, e ad esse sia applicata la corda CD, già distratta, la quale agendo faccia passare le corde nelle posizioni AE, BE, onde si abbiano due potenze agenti secondo le direzioni EA, EB. Ecco la risoluzion delle forze, adoperata in effetto dalla natura. E' dunque una misera ritirata il dire, che la natura non mai si serve della risoluzione: e osservate, che niente importa il fissare, qual sia la natura della elasticità; basta il sapere, che quelle due forze prima non erano in natura, e da una sola forza vengon prodotte. Per altro io convengo, che in moltissime occasioni non meno la risoluzione, che la composizion delle forze è una maniera d'argomentare usata da' geometri, e non un'opra della natura. Anzi io vi prego, che vi ricordiate per domani di così fatta dottrina, della quale può essere, ch'io faccia uso maggiore di quello, che vi pensate.

N. Non riconosce egli il dottissimo P. Boskovik, che in luogo d'una forza senza paralogismo, due se ne possono sostituire, purchè vengano espresse pei lati d'un paralellogrammo, di cui quella è la diagonale? E chi non sa, che non si può surrogar se non l'eguale in luogo dell'eguale? Dunque tra la forza diagonale, e le laterali dee passar qualche egualità.

L. Di questa ragione non mi servirei; perciocchè egli ottimamente risponderà, che questa egualità v'è di fatto, quando si metta a computo l'opposizion delle laterali, e che tal opposizione in ordine al punto da dimostrarsi è, come se non vi fusse. Sostentiam pure ciò, che è verissimo, che la natura soven-

fovente nelle fue operazioni della rifoluzione fi ferve, e che una forza è fpeffo caufa, onde due ne fono generate, e prodotte.

N. Avete ragione. Ma che ha a fare colla noftra quiftione la foluzione della propofta difficoltà: fembrami, che per noi s'unifca, come dice il proverbio, la luna co' gamberi.

L. Potrà effere, che ficcome molti filofofi han prefa dalla luce lunare la fpiegazione d'un fenomeno, che accade ne' gamberi; così la dichiarazione della prefente difficoltà dipenda dalla quiftione, che abbiam per le mani. Seguitemi pure, e confiderate. Se noi ci fermiamo nelle potenze, ella è cofa impoffibile di ritrovare la ricercata egualità tra le potenze laterali, e la diagonale: perciocchè i lati d'un paralellogrammo fon fempre maggiori del diametro.

N. Qualor fi parla di forze, e dell'effetto per effe prodotto, tre cofe fi vogliono metter in confiderazione; la potenza, l'azione efercitata, e l'effetto prodotto; dunque effendo difperati di rinvenire la ricercata egualità nelle potenze, offerviamo, fe mai la poteffimo rinvenir nell'azioni, le quali per mio avvifo fon la vera cagione, a cui dee effere corrifpondente l'effetto.

L. Con fottigliezza d'ingegno voi il mio penfier preveni-te: ma giacchè avete incominciato a fcuoprir l'arcano, profeguite, e fappiatemi dire, fe amendue quelle maniere, onde fi mifurano l'azioni, fono egualmente valevoli a falvare l'egualità tra la cagione, e l'effetto.

N. Due pertanto fon le maniere, onde fi mifurano le azioni: la prima è quella de' Cartefiani, i quali le vogliono proporzionali alle potenze, ed ai tempi, in cui fi efercitano; la feconda è quella de' Leibniziani, i quali avvifano effer l'azioni proporzionali alle potenze, ed agli fpazj per cui s'efercitano. Prendiam per mano in prima quella de' cartefiani. Effendo cofa certa, che in quel medefimo tempo, in cui le potenze laterali trafportano il corpo pei lati del paralellogrammo, la diagonale lo trafporta pel diametro, le azioni fi eferciteranno nel medefimo tempo; dunque effe faranno in ragione delle potenze: ma le potenze laterali fono fempre maggiori della diagonale potenza; dunque l'azioni delle laterali fon fempre maggiori dell'azione della diagonale. Quindi io

m' esibisco di perdere qualsivoglia grossa scomessa, se i Cartesiani ritrovano la necessaria egualità tra la cagione, e l'effetto.

L. Voi discorrete benissimo, e la conseguenza dedotta è dell'ultima evidenza. Contuttociò a levare ogni equivoco, convien distinguere più maniere, onde insieme cotali azioni si possono comparare: prima si possono paragonare le azioni delle potenze, che agiscono separatamente, trasportando il corpo pei lati del paralellogrammo, coll'azioni delle medesime, mentre, agendo unitamente, trasferiscono il corpo pel diametro: in oltre l'azioni delle potenze agenti separatamente pei lati coll'azione della potenza equipollente, che trasporta il corpo pel diametro: finalmente l'azioni delle potenze laterali, che, agendo unitamente, trasportano il corpo pel diametro coll'azione della potenza equipollente, che fa lo stesso. Quanto alla prima comparazione, stando nella sentenza de' Cartesiani, le azioni sono eguali, perciocchè o le potenze laterali agiscano separatamente pei lati, o congiuntamente pel diametro i tempi sono i medesimi; dunque le azioni come le potenze, e perciò eguali. Ma in questa comparazione non è posta l'egualità ricercata. Quanto all'altre due comparazioni è chiaro, che essendo eguali i tempi, l'azioni delle potenze laterali saranno sempre maggiori dell'azione dell'equipollente, per la ragione, che voi avete apportata.

N. Nella sentenza leibniziana, che fa le azioni proporzionali alle potenze, e agli spazj, siccome veggio, che vi sono delle cose recondite, e però sarebbe necessaria una più lunga meditazione, così avrò più piacere, che voi esponghiate, quanto avete pensato.

L. Come vi piace; ne di mal grado sottoporrò le spalle a quel peso, di cui voi vi sgravate. E primamente esporrò a qual termine sia stata innanzi a me ridotta la cosa dal dottissimo Sig. Bulffingero; appresso vi dichiarerò, siccome per me le sia stato dato l'ultimo compimento.

Questo Signore, che segue in sustanza la sentenza del Leibnizio, e che in più d'un luogo stabilisce l'azione delle potenze, o sia delle forze morte esser proporzionale alla potenza, e allo spazio, per cui s'esercita, la discorre così. Essendo gli spazj, che si passano in tempo eguale, cioè i lati, e la diagonale in ragione delle potenze, l'azioni loro saranno, come i qua-

quadrati delle potenze. Ciò posto, chi non vede, che se le potenze laterali formano un angolo retto, passa una strettissima egualità tra l'azioni loro, e l'azione della potenza equivalente: conciossiacosachè per Euclide in ogni rettangolo il quadrato del diametro è eguale al quadrato de' due lati.

C. Questo va bene: ma finchè ci fermiamo nell'angolo retto, dichiariamo in apparenza un caso, rendendo vie più inviluppati gli altri. La potenza espressa pel diametro del parallelogrammo non è ella egualmente equipollente o le potenze laterali concorrano ad angolo retto, ovvero ad angolo acuto, ed ottuso? Seguendo però i principj del Bulffingero, se le potenze laterali fanno angolo ottuso, l'azione dell'equipollente sarebbe minore delle azioni laterali; all'opposito maggior sarebbe, se l'angolo fosse acuto; mercecchè per Euclide nel primo caso il quadrato della diagonale è minore, nell'altro è maggiore de' due quadrati dei lati.

L. Cotal'opposizione avergli recato non leggiere fastidio, lo fanno vedere quattro parole, che egli scrive nel primo tomo degli atti di Pietroburgo nella sezione prima allo scolio primo dopo l'ottavo teorema. *Se non sembra tollerabile, che da due forze coincidenti nasca una forza maggiore dell'aggregato loro; mi spieghino i difensori della sentenza contraria, perchè nell'ipotesi loro nascano nella risoluzione due forze maggiori di quelle, onde son generate.* Contuttociò per isforzo dell'acuto ingegno, onde egli è fornito, si studia di rimuovere la vostra opposizione, che a me sembra esser grandissima. Ecco la sua risposta. Se le direzioni delle laterali potenze formano angolo retto, l'azione dell'una non è ne di vantaggio, ne di svantaggio all'azion dell'altra: onde congiunte insieme, agiscono in quella maniera medesima, con che agirebbero, se fossero separate. Ma se l'angolo è ottuso, a cagione dell'opposizione delle potenze, l'azione dell'una vien debilitata dall'azione dell'altra: se poi l'angolo è acuto, le due azioni scambievolmente si danno ajuto. Per la qual cosa l'azione della potenza equivalente, nel primo caso, deve esser minore, nel secondo maggiore delle azioni delle potenze laterali agenti separatamente l'una dall'altra.

C. Giacchè ho cominciato ad oppormi al dottissimo Bulffingero, non voglio cedere il campo così per poco. In primo

luogo

luogo quanto al caſo dell' angolo ottuſo, quantunque per l'oppoſizione delle potenze non ſembri molto aſſurdo, che nella compoſizion delle forze, due più valevoli, una men valevole ne producano: aſſurdiſſima coſa però ſi è, che nella riſoluzione, una men valevole, ne produca due più valevoli. Pure laſciando queſto caſo da parte, e venendo al caſo dell' angolo acuto, come mai ſi può concepire, che due forze agendo unitamente, comunque s' ajutino a più potere, poſſano produrre effetto maggiore della ſomma di que' due, che produrrebbero, ſe agiſſero ſeparate l' una dall' altra?

L. Seguirà a riſpondere il Bulffingero, dichiarando in qual maniera ciò poſſa, e debba ſeguire. Quelle due potenze, le cui direzioni formano angolo acuto, ſono in parte coſpiranti: quindi è, che una potenza traſporta l' altra inſieme col corpo, e che l' una, e l' altra nel corpo moſſo riſiede, e contra di lui agiſce, come ſe riſpetto a ſe fuſſe in quiete. Da qui, inſegna il Bulffingero, naſcere quello accreſcimento, onde l' azione della potenza equipollente ſupera l' azioni delle potenze laterali.

C. Debbo confeſſarvi, che ne pur così fatta riſpoſta m'appaga. Imperocchè ſe le potenze ſeparatamente l' una dall' altra ſollicitaſſero il corpo, non agirebbero contra di lui, come ſe riſpetto a ſe fuſſe in quiete? Non v' ha dunque divario alcuno tra le potenze, che agiſcono di per ſe, o inſieme. E come dunque tra gli effetti prodotti può correr tanto divario?

N. Anche queſta parte, per cui ſi fanno le azioni proporzionali alle potenze, e agli ſpazj, veggio, che incontra delle difficoltà. Perciò non diferite più a dichiararci ſe avete alcuna coſa di recondito, che abbiate meditata, ne ci tenete più coll' eſpettazione in penſiero.

L. Ma che direte, ſe dal principio dell' egualità tra la cagione, e l' effetto, e dall' ipoteſi, che l' azioni ſieno, come le potenze, e gli ſpazj, io vi dedurrò la legge ricevuta della compoſizione, e della riſoluzion delle forze?

N. Giudico eſſer grande impegno il dichiarare, ſiccome, ſtante tal legge, ſi ſalvi l' egualità tra la cagione, e l' effetto; molto maggiore il dimoſtrare queſta da quella.

L. Ma per non isbagliare nell' ordine delle propoſizioni, e della teoria, laſciate, ch' io ſpieghi queſti fogli, dove ho diſtin-

distintamente notati i miei pensamenti. E primamente per non errare nella giusta misura delle azioni, e per non equivocare colla parola spazio, a cui dicesi proporzionale l'azione, io mi servirò d'un genere di forze, dalle quali l'equivoco sia levato. Adoprerò corde elastiche già distrate, le quali per mezzo della contrazione, o della nuova distrazione, che soffrono, indicano assai chiaramente l'azione per esse esercitata. Laonde io supporrò nell'avvenire, che l'azioni esercitate sieno proporzionali alle potenze, ed alle contrazioni, o distrazioni delle corde elastiche.

Ciò premesso, io stabilisco le seguenti ipotesi.

Ipotesi prima. Le corde di cetra di già distratte, nel sostenere una infinitesima contrazione, o distrazione, si possono considerare dotate d'una forza, e d'una elasticità costante: giacchè senza paralogismo si può trascurare quel più, che acquistano nella nuova distrazione, ovver quel meno, che perdono nella contrazione, essendo questa parte infinitesima, e però incomparabile con quella finita elasticità, di cui prima fornite erano. In avvenire non avendo noi a considerare se non contrazioni, o distrazioni infinitesime, considereremo come costanti, ed invariate le forze delle corde elastiche.

Ipotesi seconda. Le azioni delle corde elastiche sono proporzionali alle potenze, ed alle contrazioni, o distrazioni, che soffrono.

N. Questa altro non è, che la vostra sentenza della misura delle azioni, nella quale col principio dell'egualità tra la cagione, e l'effetto vi siete preso l'assunto di dimostrare la composizione, e la risoluzion delle forze. Perciocchè, se ben comprendo il vostro disegno, egli è il seguente. Nell'opinion cartesiana, che misura l'azion dal tempo, è cosa impossibile il salvar l'egualità tra la cagione, e l'effetto; nella leibniziana, la qual la misura dallo spazio, non solo si salva, ma di più si dimostra la risoluzione, e composizione delle forze col principio dell'egualità tra la cagione, e l'effetto; dunque la cartesiana non può esser vera, ma solamente la leibniziana.

L. Ottimamente: ma non interrompiamo il filo.

Ipotesi terza. Le corde elastiche già distratte di per se si restituiscono, e si accorciano, ma resistono ad una nuova distra-

ſtrazione. Quindi è, che nella contrazione trasferiſcono l'energia dell'azion loro nel corpo, o potenza, a cui vengono applicate; ma nella diſtrazione tanto levano alla forza del corpo, o della potenza, quanta è l'azion della diſtrazione. Da quì naſce la

Ipoteſi quarta. L'elemento della forza viva, che ſi trasferiſce nel corpo, a cui una, o più corde elaſtiche ſi applicano, è eguale all'aggregato di tutte le azioni, ſe tutte le corde ſi accorciano; alla differenza, ſe, alcune accorciandoſi, ſi diſtraggano l'altre. Laonde l'azione di più compoſta è eguale alla ſomma, od alla differenza dell'azioni, ſecondo i diverſi caſi.

A cotali ipoteſi aggiungerò due definizioni.

Definizione prima. Io chiamo potenza equipollente ad una, a due, o a più potenze quella, la cui azione è eguale all'azion compoſita di tutte l'altre, mentre il corpo per lo ſteſſo ſpazio vien trasferito.

Definizione ſeconda. Qualunque corpo, a cui una, o più corde elaſtiche vengano applicate, ſe è libero a prender qualunque ſtrada, diremo, che per una libera direzione viene ſollicitato: ma ſe coſtretto ſia a prender una ſtrada determinata, come ſe poſto ſia dentro un canale, dal quale uſcire non poſſa, diremo, ch'egli viene ſollicitato per una direzion neceſſaria.

Ciò premeſſo, entro in viaggio, e a lenti paſſi camminando, mi anderò a poco a poco accoſtando al termine.

In primo luogo m'accingo a conſiderare un corpo A, (*Fig.* 3) che venga ſollicitato dalla corda elaſtica SA, la cui potenza ſia AB, e ſia coſtretto a camminare per la direzion neceſſaria AD; e ricerco nella direzion neceſſaria AD la potenza equipollente alla potenza AB. Facil coſa è a dimoſtrare, che, ſe dal punto B io laſcio cadere una normale BH nella direzion neceſſaria AD, la potenza equipollente all'AB, ſarà la AH. S'intenda adunque applicata al corpo A la corda elaſtica AD, già ſtirata, la cui potenza venga eſpreſſa dalla AH. L'una, e l'altra potenza AB, AH ſeparatamente trasferiſca il corpo per lo ſteſſo elemento A*a*. Chiara coſa è, che in cotal trasporto la corda SA paſſerà nella ſituazione S*a*; dunque fatto centro in S coll'intervallo S*a*, e deſcritto il minimo

nimo arco di circolo *ap*, ella sarassi accorciata dell'elemento A*p*; dunque la sua azione verrà rappresentata dal rettangolo BA*p*. Dall'altra parte la corda DA si farà contratta per l'elemento A*a*; dunque la sua azione verrà espressa dal rettangolo HA*a*. Quindi se questi due rettangoli BA*p*, HA*a* saranno eguali, saranno pur eguali le azioni, e perciò secondo la diffinizione le potenze equipollenti: ma è chiaro, che i nominati rettangoli sono eguali. Conciossiachè i due triangoli BAH, *a*A*p*, che, oltre all'angolo comune in A, hanno gli angoli in H, *p* retti, sono simili; dunque BA : AH : : A*a* : A*p*; dunque BA*p* eguaglia HA*a*: come si dovea dimostrare.

N. La dimostrazione dedotta dai novelli vostri principj insegna quello, che veniva anche prima ricevuto concordemente da tutti. Mercechè sia AB la direzione, e la potenza della gravità, di che il corpo A è dotato; AD sia un piano inclinato, che obbliga il corpo a viaggiare per la direzion necessaria AD, è noto, che la AH veniva presa per la potenza sollicitante il corpo per AD. Sicchè il vostro metodo non insegna propriamente niente di nuovo, ma mette in veduta la cagione ignota di ciò, che innanzi sapevasi; la qual cagione alla fine altra non è, che l'egualità dell'azioni.

C. Raccogliamo dalla proposizione i corollarj ancora più facili, perchè sempre dan nuovo lume. Quanto più acuto sarà l'angolo BAH, tanto sarà maggiore la potenza AH; e quanto più l'angolo HAB crescerà, tanto la potenza AH anderà minorando, e se il detto angolo sarà retto, la potenza AH sarà nulla. Che se l'angolo HAB fosse ottuso, la potenza AH solliciterà dalla parte opposita, essendo manifesto, che la AB dee sempre agire dalla parte dell'angolo acuto. Conciossiachè la corda per se medesima s'accorcia, ma per se medesima non può allungarsi: ed agendo dalla parte dell'angolo ottuso si allungherebbe vie più.

L. Questi sono corollarj ottimi, e manifesti, ma ad altri più necessarj fa di mestieri rivolger l'occhio. Essendo eguali le azioni delle due potenze AB, AH per l'elemento A*a*, ditemi, quali forze saranno trasferite e nell'un caso, e nell'altro nel corpo A, mentre in *a* si ritrova?

N. Le azioni sono le cagioni, le forze vive sono gli effetti; dunque se le cagioni sono eguali, eguali dovranno es-

sere altresì gli effetti; dico, che nell'un caso, e nell'altro il corpo A si trova dotato d'egual forza viva.

L. Così dev'essere sicuramente; dunque le velocità dell' un caso, e dell'altro in qual proporzione saranno?

N. D'egualità; non potendo uno stesso corpo aver egual forza viva, se non è fornito d'eguale velocità. Quindi ricavasi, che o venga il corpo A sollicitato dalla A B, o dalla equivalente A H passerà lo spazietto A *a* nello stesso tempo; perchè uno stesso spazio con eguali velocità deve essere in egual tempo necessariamente passato.

L. M'avete prevenuto. Ma cangiamo al presente ipotesi, e ponghiamo, che la potenza A B agisca secondo la sua direzione trasferendo il corpo da A in *p*, e la equivalente A H agisca secondo la direzion sua trasportando il corpo da A in *a*; quale sarà la proporzion tra le forze vive del corpo A giunto in *p*, e del corpo A giunto in *a*?

N. Dalla vostra dimostrazione è patente, che eguali sono le azioni; dunque eguali le forze vive; dunque eguali le velocità.

L. Benissimo; ma i tempi per A *p*, A *a* saranno essi eguali?

N. Questo non lo veggio io, perchè, sebbene eguali sono le velocità, ineguali sono gli spazj; onde penso, che i tempi saranno assolutamente ineguali. Però voi, che ci avete pensato, diteci, qual sarà la proporzion loro?

C. Poichè per gli spazj A *a*, A *p* il mobile A si ritrova avere le stesse velocità, chiara cosa è, che i tempi per A *a*, A *p* saranno in ragion degli stessi spazj A *a*, A *p*, ovvero in ragione di A B : A H.

L. Ottimamente; ma per le cose, che abbiamo a dire lasciate, che per me un'altra dimostrazione vi si proponga, e prima d'esporvela vi avverto, che distinguiate sempre i tre casi; primo, quando la potenza A B agendo trasporta nella sua direzione il corpo per A *p*; secondo quando la stessa potenza lo trasferisce nella direzion necessaria per A *a*; terzo quando la potenza equivalente A H per lo stesso spazio A *a* lo trasferisce. Ciò posto vengo alla dimostrazione. Il tempo, in cui il mobile sollicitato dalla potenza A H scorre la A *a*, al tempo, in cui sollecitato dalla A B passa la A *p*, per le leggi del Galileo è di-

ret-

rettamente, come la velocità in a alla velocità in p, e reciprocamente, come la potenza A H alla A B; e perchè le velocità in a, p sono eguali, i detti tempi saranno reciprocamente, come la potenza A H alla A B, ovvero direttamente, come A B : A H; ma il tempo, in cui il mobile spinto dalla A H scorre la A a, è eguale al tempo, in cui sollecitato dalla A B scorre la A a; dunque in tutti i casi il tempo per A a al tempo per A p è, come A B : A H; come dovevasi dimostrare.

N. Cosa maravigliosa; quantunque l'azioni per A a, A p sieno eguali, come la contrazione delle corde elastiche fa vedere; pure cotali azioni in tempi molto diversi vengono esercitate.

L. Non ve ne dovete maravigliare; perciocchè noi parliamo sempre nell'ipotesi, che l'azioni sieno in ragion delle potenze, e di quegli spazj, che dalle contrazioni delle corde elastiche vengono dinotati. Per altro è certo per tutti, che i tempi, in cui si scorrono gli spazj A a, A p, sono ineguali; e pure eguali sono le velocità in a, p; dunque eguali le forze vive; dunque sembra chiaro, che eguali sono l'azioni, da cui vengon prodotte; sebbene queste azioni in disuguali tempi dalla stessa potenza A B vengono esercitate. Ma che che sia di ciò, proseguiamo i ragionamenti nell'assunta ipotesi.

N. M'avete ora fatto sovvenire, che questa stessa proporzione de' tempi è stata molto tempo innanzi per altro metodo dimostrata dal Galileo ne' piani inclinati. Giacchè se A B è la direzion della gravità, e però verticale, A D il piano inclinato, a p perpendicolare alla verticale verrà ad essere orizzontale; dunque in p, a le velocità eguali; ma i tempi per A a, A p, come A a : A p; e però come A B : A H.

C. Giacchè vi piace di paragonare le conseguenze dedotte col nuovo metodo del Sig. Lelio colle verità già conosciute, osservate, che il centro delle forze ora adoprate è il punto S; dunque il mobile ne' punti a, p, dove di egual velocità è dotato, si ritrova dal centro egualmente distante; la qual verità è stata da molti con altro metodo dimostrata, che quando il mobile ritrovisi dal centro delle forze egualmente distante, qualunque strada siasi per lui tenuta, è fornito della stessa velocità.

N. Questo è un contrassegno della giustezza del metodo.

 Ma

Ma veggiamo qual ſarà lo ſpazio nella direzion A B, che ſi paſſa in quel tempo, in cui vien paſſata la A *a*.

L. Dal punto *a* menate *a m* perpendicolare ad A D; dico, ch' egli ſarà A *m*. Dimoſtrazione. Il tempo per A *a* al tempo per A *p* è, come A B : A H; ma il tempo per A *p* al tempo per A *m* è, come $\sqrt{Ap} : \sqrt{Am} :: Aa : Am :: AH : AB$; dunque il tempo per A *a* al tempo per A *m*, come A B : A B; la quale eſſendo ragione d' egualità fa vedere, che i predetti tempi per A *a*, A *m* ſono eguali; ſiccome ſi dovea dimoſtrare.

N. Queſto pure s' accorda con ciò, che è ſtato dimoſtrato dal Galileo ne' piani inclinati; concioſſiachè, ſe da qualunque punto della verticale *m* ſi mena una perpendicolare *m a* al piano inclinato A D, la verticale A *m* verrà paſſata nello ſteſſo tempo, che la parte del piano inclinato A *a*.

C. Tutto bene; ma io conſidero, che avvi un' altra potenza, colla quale il mobile sforzaſi di partir dalla direzion neceſſaria, e preme perpendicolarmente il lato del canale, che l' impediſce. Di queſta voi non avete fatta parola, e non avendola meſſa a computo può eſſere, che tutto il progreſſo della dimoſtrazion ſia vizioſo.

N. Temo non il voſtro ſoſpetto ſia più ingegnoſo, che vero. Non vi ricordate ciò, che ſi è detto poco dianzi, che ſe l' angolo B A H s' allargaſſe per guiſa, che B A veniſſe a far angolo retto colla direzion neceſſaria A D, la potenza equivalente ſarebbe nulla; e ciò non per altra cagione, ſe non perchè la ſua azione s' annullerebbe? Quella potenza, onde il mobile sforzaſi di partir dalla direzion neceſſaria, non è eſſa per confeſſion voſtra alla ſteſſa direzion perpendicolare? dunque la ſua azion ſarà nulla; dunque, dove unicamente d' azion ſi favella, non ſi deve conſiderare, e metter a computo.

L. La voſtra rifleſſione diſſipa ogni ombra di difficoltà. Ma pure ſe volete una prova più patente, e geometrica; eccovela. Ho dunque in animo di provare, che qualunque potenza perpendicolare alla ſtrada, che tiene il mobile, non eſercita azione alcuna. Poſta la direzion neceſſaria A D, ſia applicata al mobile la corda, e la potenza T A perpendicolare ad A D. Agiſca contro allo ſteſſo qualunque potenza A H, e traſporti il corpo da A in *a* per un infiniteſimo ſpazio.

Chia-

Chiara cosa è, che in cotal movimento la corda TA passerà in T*a*; dunque fatto centro in T coll' intervallo TA descrivasi il minimo arco di circolo *aq*; dunque *aq* sarà la distrazion della corda; dunque la sua azione verrà espressa dal rettangolo T*qa*; là dove l'azione della potenza AH espressa viene dal rettangolo HA*a*; ma il rettangolo T*qa* è infinitamente picciolo, e per conseguenza nullo rispetto al rettangolo HA*a*, perchè essendo AH, AT finite, ed A*a* infinitesima dell' ordine primo, *aq* è infinitesima del secondo, come fa vedere la teoria degli infinitesimi; dunque l'azione della potenza AT è nulla per riguardo all' azione della potenza AH, e perciò si può, anzi si deve omettere, e trascurare. Essendo dunque quella potenza, onde il mobile tenta d' allontanarsi dalla direzion necessaria perpendicolare alla strada, che tiene, non mi dovete condannare, se di lei non ho fatta menzione alcuna.

C. Non ostante ciò, se ne potrà la sua quantità stabilire.

L. Agevolmente. Dico, che essa vien espressa per BH. Si meni AE normale ad AD, ed alla stessa AD parallela menisi la BE. La potenza, onde il mobile tenta d' allontanarsi dalla direzion necessaria AD non può esser altra, se non quella, dalla quale verrebbe sollicitato per la direzion necessaria AE normale alla AD; ma la potenza, onde il mobile verrebbe sollicitato nella direzion necessaria AE, sarebbe la stessa AE, ovvero la sua eguale HB, come si è dimostrato poco innanzi; dunque HB rappresenta la potenza, colla quale il mobile tenta d' allontanarsi dalla direzion necessaria AD; la qual cosa volevasi dimostrare.

N. A me sembra, che altro dir non si possa d' una potenza, che sollecita un corpo per una direzion necessaria; onde è omai tempo, che passiamo a due.

L. Così dee farsi. Io subito mi metto sotto degli occhi due corde di cetra SA, TA (*Fig.* 4, *e* 5.) fermate immobilmente ne' punti S, T, e legate amendue al corpo A; il quale sia obbligato a camminare nella direzion necessaria AD posta nel piano delle corde, e ricerco nella stessa direzion AD la potenza equivalente. Le potenze delle corde elastiche sieno espresse dalle AB, AC, e da' punti B, C nella direzion AD si menino le normali BH, CK; si tagli KD eguale ad AH, dico, che

che la retta A D rappresenterà la potenza equipollente alle due potenze A B, A C; cioè se talmente si distragga una corda, onde la sua virtù elastica venga espressa per A D, eserciterà una azione eguale a quelle, che vengono esercitate dalle due potenze A B, A C trasportando il corpo per uno stesso elemento.

Concepiamo, che le due corde A S, A T contraendosi trasportino il mobile per l'elemento A *a*, lo che pur faccia la potenza A D. Co' centri S, T, e cogli intervalli S *a*, T *a* si descrivano i minimi archi di circolo *a p*, *a q*. Egli è manifesto, che le contrazioni delle due corde sono A *p*, A *q*; dunque le azioni per loro esercitate verranno espresse dai rettangoli B A *p*, C A *q*. Così l'azione della potenza A D verrà espressa dal rettangolo D A *a*; dunque se il rettangolo D A *a* sia eguale ai due rettangoli B A *p*, C A *q*, l'azione della potenza A D eguaglierà l'azioni delle due potenze A B, A C; e però questa potenza a queste verrà ad esser equipollente; ma il rettangolo D A *a* eguaglia in effetto i due rettangoli B A *p*, C A *q*. Imperciocchè i triangoli A B H, A *a p*, che oltre l'angolo comune in A hanno un angolo retto, sono simili; dunque A B : A H : : A *a* : A *p*, e però il rettangolo delle medie H A *a* eguaglia quel dell'estreme B A *p*. Similmente sono simili i triangoli A C K, A *a q*; dunque A C : A K : : A *a* : A *q*; dunque il rettangolo K A *a* è eguale al rettangolo C A *q*; dunque $\overline{AH + AK} . Aa = BAp + CAq$; ma A H eguaglia D K; dunque $\overline{DK + AK} . Aa = DAa = BAp + CAq$; come dovevasi dimostrare.

Abbiamo adunque ritrovata la potenza A D equipollente alle due A B, A C.

C. Chiarissima dimostrazione, la quale però si potea dedurre da ciò, che abbiam detto d'una potenza costretta a sollecitare per una direzion necessaria. Conciossiachè la potenza B A equivale alla A H, agente nella direzion necessaria, la A C equivale alla A K; dunque tutte e due insieme A B, A C, equivalgono alle due A H, A K, o sia alla sola A D.

L. Questo sarebbe un metodo più spedito; ma nella materia, che ho per le mani ho giudicato necessario d'usar immediatamente il principio dell'egualità delle azioni.

N. La dimostrazione è ella universale, ed ha luogo, quando

do la direzion necessaria non sia posta in mezzo alle due potenze, ma se le lasci amendue da una parte? Non ve n'ha dubbio. I triangoli simili, che son la base della dimostrazione egualmente si formano, onde ella è universalissima. Penso bensì, che alcuna varietà intervenga per ciò, che le potenze formino diverso angolo colla direzion necessaria. Perciò lasciate, che per meglio fissarmele in mente, per me medesimo le diverse ipotesi ne sviluppi. Se una delle due corde, siccome A T, (*Fig.* 3) facesse colla direzion necessaria A D un angolo retto, allora accorciata l'altra A S, questa ne si accorcierebbe, ne allungherebbe, e però niuna azione si esercitarebbe per la corda A T, siccome si è avvertito ancora di sopra.

Che se l'una, e l'altra corda S A, T A (*Fig.* 4) facesse colla direzion necessaria A D un angolo acuto, amendue si accorcierebbero, onde la somma dell'azioni loro all'azione della potenza equivalente dovrebbe esser eguale.

Ma se la A T facesse angolo ottuso; allora (*Fig.* 5) accorciandosi la corda S A, verrebbe vie più distratta la A T; onde la prima eserciterebbe azione di contrazione, l'altra di distrazione; e perciò la differenza di queste azioni avrebbe ad esser eguale all'azione dell'equipollente A D.

Ho preso sempre gli angoli da quella parte, ove si fa il moto, siccome avrete conosciuto per voi medesimi.

C. Di fatto, osservate, che quando contraendosi una corda, l'altra patisce distrazione, le rette A H, A K sono poste in parti opposite per rispetto al punto A; onde si fa manifesto, che l'una dall'altra sottrar si deve ad avere la potenza equivalente A D.

L. Comunque cotai riflessioni, che opportunamente fatte avete, ci deviino alquanto dal principale suggetto; pure esse ajutano a meglio imprimerlo nella mente, e a vederlo da tutti quanti i suoi lati. Ma ora rivolgiamoci a determinare quella potenza, onde il mobile tenta d'allontanarsi dalla direzion necessaria, e preme l'una delle sponde del canale. Per lo qual fine tagliate B L (*Fig.* 4. 5) eguale a C K; indi condotta E F normale alla direzion necessaria A D, lasciate sopra di essa cadere dai punti B, C le normali B E, C F, e tagliate E G, eguale alla A F. La potenza, onde il mobile tenta d'allontanarsi dalla direzion necessaria A D, dee essere quella stessa, colla quale ver-

verrebbe ſpinto per la direzion neceſſaria A E: ma per le coſe dette, queſta ſarebbe eguale ad A G; dunque A G è quella potenza, che proccura di portar il corpo fuori della direzion neceſſaria A D; ma A G eguaglia H L; dunque eſſa verrà ancor eſpreſſa per H L.

Quindi dedur vi piaccia, che ſe A E eguaglia A F, ovvero B H eguaglia C K, la potenza A G, ovvero H L, ſarà affatto nulla: onde ſe la direzion neceſſaria fuſſe A E, il mobile ſtarebbe fermo, ed in equilibrio; e ſpinto per la direzion neceſſaria A D, non proccurerebbe d'allontanarſene ne per l'una parte, ne per l'altra.

N. Mi cade in penſiero, che forſe dedur ſi potrebbe cotal verità, cioè che il mobile ſtia in equilibrio, in ſuppoſizione, che A E eguagli A F, immediatamente dall'egualità delle azioni contrarie. Fingiamo adunque, che il mobile A (*Fig. 6*) ſia coſtretto a viaggiare per la direzion neceſſaria A E: ſieno ad eſſo attaccate due corde elaſtiche S A, T A, le cui potenze ſieno A B, A C. Di più concepiamo, che il mobile, ſe è poſſibile, ſia traſportato per lo ſpazio infiniteſimo Aa; le corde elaſtiche paſſeranno ne' ſiti Sa, Ta. Co' centri S, T ſi deſcrivano i minimi archi di circolo ap, aq. Chiara coſa è, che in cotal movimento, mentre la corda S A ſi accorcia per Ap, la corda T A ſoffre la diſtrazione Aq; dunque un' azione è di contrazione, l'altra di diſtrazione. Quindi ſe cotali azioni ſono eguali, non è poſſibile, che veruna azione s'eſerciti, ed il corpo di neceſſità riposerà in equilibrio. Veggiamo quando così fatte azioni ſieno eguali. Si conducano alla A E le normali B E, C F. Le azioni ſono tra loro in ragion compoſita di $\frac{BA : CA}{Ap : Aq}$; ma $\frac{Ap : Aa :: AE : AB}{Aa : Aq :: AC : AF}$; dunque $Ap : Aq$ in ragion compoſita di $\frac{AE : AB}{AC : AF}$; dunque le azioni ſaranno

$$\text{in ragion compoſita di } \begin{matrix} BA : CA \\ AE : AB \\ AC : AF \end{matrix} :: AE : AF:$$

dunque ſe A E ſia eguale alla A F, le azioni ſaranno eguali: come ſi dovea dimoſtrare.

L. Ottima maniera di dimoſtrare una verità, che ha terminato di aprirci la ſtrada per ritrovare la potenza equipollente

lente a due nella direzion libera. Sieno (*Fig.* 4, *e* 5) al mobile A applicate due corde elastiche SA, TA, le cui potenze vengano rappresentate dalle due AB, AC. Da' punti B, C si menino le rette BD, CD parallele alle corde AT, AS, e si compia il paralellogrammo ABDC, di cui menisi la diagonale AD: dico, che questa sarà la direzion libera del corpo A, e che in questa direzione dalla diagonale AD verrà espressa la potenza equivalente.

Meninsi BH, CK normali al diametro AD. Quella deve essere la libera direzion del corpo, nella quale BH eguaglia CK; mercechè da essa, siccome si è detto, in niuna maniera il mobile tenta d allontanarsi. Di più in questa direzione quella è la potenza equivalente, la quale eguaglia le due potenze AH, AK prese insieme. Ma nella costruzion fatta BH, eguaglia CK, ed AD eguaglia AH + AK; le quali cose dalle proprietà del paralellogrammo discendono; dunque ec

C. Questa per l'appunto è la legge ordinaria della composizione, e risoluzion delle forze; ed essa è dedotta dal principio dell'egualita tra le azioni delle potenze laterali, e l'azione dell'equipollente, cioè dal principio dell'egualità tra la cagione, e l'effetto: tanto è falso, che nella legge della composizione, e risoluzion delle forze cotal principio non si mantenga.

L. E' bene prima ricavar parecchie conseguenze dalle cose dimostrate, e poi ritorneremo all'egualità tra la cagione, e l'effetto, che è il principale nostro suggetto. Primamente paragono il corpo A, il quale spinto dalle due potenze AB, AC, scorre lo spazietto A*a*, collo stesso corpo, il quale passa lo stesso spazio, sollecitato dalla potenza equivalente AD. Egli è chiaro, che essendo eguale l'azione di questa all'azioni di quelle, la stessa forza viva si trasfonde nel corpo A; dunque ancor la stessa velocità; dunque è di mestieri, che lo spazietto A*a* nello stesso tempo venga passato.

In oltre io paragono le due potenze AB, AC agenti separatamente, che promuovono il corpo la prima in *p*, l'altra in *q*, colle stesse potenze agenti di compagnia, le quali promuovono il corpo in *a*. Conciossiachè le contrazioni delle corde son le medesime, le medesime altresì saranno l'azioni; dunque la somma delle forze vive, di che è dotato il corpo in *p*,

 q, è

q, è eguale alla forza viva, trasfusa nello stesso corpo per l'elemento Aa. Laonde i quadrati delle due velocità in p, q, eguaglieranno il quadrato della velocità in a.

N. L'egualità tra i quadrati delle velocità in p, q, ed il quadrato della velocità in a, si può agevolmente provare per mezzo de' teoremi del Galileo. Imperciocchè egli ha fatto vedere, che nel moto accelerato per una forza costante, le velocità sono espresse dall'ordinate d'una parabola, le cui abscisse sono gli spazj passati, il parametro eguaglia il doppio della potenza. Dunque, chiamando la velocità in $a = dU$, la velocità in $p = du$, la velocità in $q = dv$, avremo $dU^2 = 2AD.Aa$, $du^2 = 2AB.Ap$, $dv^2 = 2AC.Aq$: ma come si deduce dalle vostre pruove $AD.Aa = AB.Ap + AC.Aq$; dunque $dU^2 = du^2 + dv^2$.

Quindi ancor si deduce la vera misura delle velocità in a, p, q, cioè a dire $dU = \sqrt{2AD.Aa}$, $du = \sqrt{2AB.Ap}$, $dv = \sqrt{2AC.Aq}$.

C. Così fatte deduzioni, a dir vero, sono eleganti, e belle: ma come mai le applicherete voi al caso, in cui una delle potenze faccia angolo ottuso colla direzione o libera, o necessaria. Se amendue le corde fanno colla direzione del mobile un angolo acuto, (*Fig.* 4) agendo unitamente amendue si contraggono, onde agendo separatamente, possono promuovere il corpo in p, q. Ma se una d'esse, (*Fig.* 5) come AT, faccia colla direzione AD un angolo ottuso, allora agendo insieme coll'altra, patirà distrazione; e come per se medesima non può distrarsi, così agendo separatamente non può promuovere il corpo in q.

N. Avvertite, che siam nel caso, quando non la somma, ma la differenza dell'azioni delle potenze AB, AC, eguagliano l'azione della potenza equivalente AD. Laonde non la somma, ma la differenza de' due quadrati delle velocità in p, q, verrebbe ad esser eguale al quadrato della velocità in a. Ad avere la velocità in q, poichè questa non può esser prodotta dalla corda AT, che non può allungarsi, si potrebbe sostituire la corda tA (*Fig.* 7) agente per la parte opposta, la cui potenza sia Ac eguale ad AC, ed allora ripetendo le stesse dimo-

dimoſtrazioni ſi farebbe vedere, che il quadrato della velocità in a farebbe eguale alla differenza de' due quadrati delle velocità in p, q.

L. Poichè avete uſato l' artificio di ſurrogare la potenza Ac, in luogo di AC, ad avere la velocità in q, laſciate, ch' io mi fermi alquanto, e che vi faccia vedere, che ſe AD nella direzion libera è la potenza equivalente alle due AC, AB, la AB nella direzion libera ſimilmente ſarà la potenza equivalente alle due AD, Ac. La qual coſa quantunque ſia patente, perocchè ſe ACDB è un paralellogrammo, preſa Ac, egual ad AC, lo ſarà ſimilmente $AcBD$: pure non ſarà fuor di propoſito, con una dimoſtrazione più inviluppata, dedurla dall' egualità dell' azioni.

Fatto centro ne' punti D, t, cogli intervalli Dp, tp, ſi deſcrivano i minimi archi py, px. Poichè per l' ipoteſi AD è potenza equipollente alle due AC, AB, ſarà $AD.Aa = AB.Ap - AC.Aq$ (ſe ne prende la differenza, perchè contratta la corda SA, ſi diſtende la corda TA); dunque $AD.Aa + AC.Aq = AB.Ap$: ma ſe AD è la direzion libera, cioè ſe ACBD è un paralellogrammo, ſarà $AD.Aa + AC.Aq = AD.Ay + Ac.Ax$: ſiccome or ora dimoſtrerò; dunque $AB.Ap = AD.Ay + Ac.Ax$; dunque AB è la potenza equivalente alle due AD, Ac.

Dimoſtro quel, che ho promeſſo. Giacchè ABDC è un paralellogrammo, e ſi è preſa $Ac = AC$, le due DA, Bc, che congiungono eguali, e paralelle, eguali ſaranno, e paralelle, e la figura $cADB$ un paralellogrammo. Dal punto B ne' lati di queſto paralellogrammo ſi menino le normali BH, BK. Si congiunga xy, e ſi noti il punto o, ove le infiniteſime py, aq ſi tagliano. In prima ſarà $ay : xq :: ao : po$, perchè ſe dal punto p ſi conduceſſe una normale in aq, queſta ſarebbe eguale a xq, e ſi formerebbe un triangolo affatto ſimile al triangolo aoy. Di più i triangoli apo, xyp ſono ſimili, perchè oltre agli angoli xpo, poa alterni per riſpetto alle paralelle, hanno gli angoli, apo, pxy eguali: perciocchè il circolo deſcritto ſopra il diametro Ap, paſſa per li punti x, y, e tocca la pa normale al diametro; dunque l' angolo apo, fatto dalla tangente, e dalla ſecante, ſarà eguale all' angolo pxy, che nell' alterno ſegmento vien contenuto. Sarà dunque

 $ao:$

$ao : op :: py : px$; dunque per l' egualità delle ragioni $ay : xq :: py : px ::$ BH : BK :: BD : Bc :: Ac : AD; dunque $AD . ay = Ac . xq$. Si aggiunga dall' una parte, e dall' altra $AD . Ay + Ac . Aq$, e sarà $AD . \overline{Ay + ya} + Ac . Aq = AD . Ay + Ac . \overline{Aq + xq}$: ovvero $AD . Aa + Ac . Aq = AD . Ay + Ac . Ax$: come si dovea dimostrare.

Perdonate questa dimostrazione nojosa in una cosa patente, e schietta, perchè son troppo sollecito, che si veda mai sempre regnare egualità d'azioni, ove interviene l'equipollenza. Intanto se non avete cosa alcuna in opposito, passiamo à vedere, in quai tempi ne' moti separati si scorrono gli spazj Aa, Ap, Aq (*Fig.* 4., *e* 5). Ma voi, Signori, non mi sgraverete in parte della fatica, e non v' ingegnerete di ritrovarli per voi medesimi?

N. Farò come un fanciullo, che tenta di muovere un grosso peso, a cui quando le sue forze pari non sieno, domanda ajuto ad un uomo di robustezza fornito. Ritenuti i simboli, di che ci siamo poco anzi serviti, chiamo il tempo per $Aa = dT$, il tempo per $Ap = dt$, il tempo per $Aq = d\theta$. Per le leggi del Galileo si ha $AD . dT = dU$, $AB . dt = du$; dunque $dT . dt :: \frac{dU}{AD} : \frac{du}{AB}$; ma come ho toccato dianzi $dU : du :: \sqrt{AD . Aa} : \sqrt{AB . Ap}$; dunque $dT : dt :: \frac{\sqrt{Aa}}{\sqrt{AD}} : \frac{\sqrt{Ap}}{\sqrt{AB}}$; ma $Aa : Ap :: AB : AH$; dunque $dT : dt :: \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{AD}} : \frac{\sqrt{AH}}{\sqrt{AB}} :: AB : \sqrt{AD . AH}$.

Similmente si dimostrerà $dT : d\theta :: AC : \sqrt{AD . AK}$; onde si deduce $dt : d\theta :: \frac{\sqrt{AH}}{AB} : \frac{\sqrt{AK}}{AC}$.

C. Veggio, che così fatti tempi, universalmente parlando, son disuguali. Ma se gli angoli ABD, ACD retti fossero, veggio, che la AB sarebbe media proporzionale tra AD, AH, e la AC media proporzionale tra AK, AD, onde i tempi predetti verrebbero ad esser eguali. Laonde ne' moti liberi, acciocchè così fatti tempi eguali sieno, è necessario, che l'angolo BAC, formato dalle potenze, sia retto.

L. Re-

L. Resta, Sig. Nestore, che compiate l'opera col ritrovare nelle direzioni AB, AC quegli spazietti, i quali, agendo le potenze separatamente, verrebbero scorsi nello stesso tempo, che A*a*.

N. Sieno cotai spazietti A*m*, A*n*. Discorriamola così. Il tempo per A*a* al tempo per A*p* è, come $AB : \sqrt{AD.AH}$; ma il tempo per A*p*, al tempo per A*m*, come $\sqrt{Ap} : \sqrt{Am}$; dunque il tempo per A*a* al tempo per A*m* sarà, come $AB . \sqrt{Ap} : \sqrt{AD.AH.Am}$; dunque, perchè i detti tempi eguali sieno, dovrà essere $AB . \sqrt{Ap} = \sqrt{AD.AH.Am}$, ovvero $\sqrt{Am} : \sqrt{Ap} :: AB : \sqrt{AD.AH}$, ovvero $Am : Ap :: AB^2 : AD.AH$; ma $Ap : Aa :: AH : AB$; dunque $Am : Aa :: AB : AD$; dunque i triangoli A*ma*, ABD saranno simili, e per conseguenza *am* paralella a BD. Similmente dimostrerò, che *an* dee esser paralella a CD, perchè lo spazio A*n* sia scorso nello stesso tempo, che A*a*. Perciò ne' movimenti liberi A*man*, sarà un paralellogrammo. Verissimo è dunque, che, co' moti separati, i lati del paralellogrammo si scorrono nello stesso tempo, che la diagonale col composito. Io veggio, che così fatta dimostrazione potrebbe condursi a maggior brevità; ma qualche negligenza dee condonarsi a chi fu due piedi discorre, e scioglie problemi.

C. Mille corollarj si deducono. Le linee A*m*, A*p* non possono esser eguali, se l'angolo A*ma*, e per conseguenza ABD, non è retto. Lo stesso dicasi delle A*n*, A*q*. Laonde posta la direzion libera, quando l'angolo BAC sarà retto, A*m* sarà eguale ad A*p*, A*n* ad A*q*.

Se l'angolo ABD (*Fig.* 4) sarà ottuso, la A*m* sarà minore della A*p*. Lo stesso dicasi dall'altra parte delle A*n*, A*q*. Perciò nella direzion libera, se l'angolo BAC sarà acuto, la A*m* sarà minor della A*p*, la A*n* della A*q*: anzi se sarà infinitamente acuto, ovver se le potenze AB, AC coincideranno, si avrà $Am + An = Aa$, ma $Ap = Aq = Aa$.

All'opposito, se l'angolo ABD (*Fig.* 5) è acuto, sarà sempre A*m* maggior di A*p*, e se è acuto l'angolo ACD, A*n* sarà maggiore di A*q*; anzi se l'angolo fatto dalla potenza AC, e dalla direzion AD sarà ottuso, A*q* diventerà negati-

gativa, ed An, Aq a parti opposite si porteranno. Questo nella direzion libera è il caso, in cui l'angolo BAC è ottuso; e s'egli fusse infinitamente ottuso, onde le potenze AB, AC sollicitassero per direzioni del tutto opposte, allora si troverebbe $Am - An = Aa$; ma $Ap = Aq = Aa$: nel qual caso si dee avvertire però, che Ap, Aa rappresenteranno la contrazion di due corde, là dove Aq esprime la distrazion della terza.

L. Dimostrate tutte queste verità, ritorniamo là, d'onde partiti noi siamo, e facciam vedere siccome nella composizione, e risoluzione delle forze si mantenga squisitamente l'egualità tra la cagione, e l'effetto: nel qual discorso io parlerò solamente della direzion libera per amor di chiarezza, non essendo difficile l'applicar tutto il raziocinio alla direzion necessaria, quando abbiate a mente le cose, che si sono dette sin ora. Se amendue le corde di cetra in un tempo vengano applicate a qualunque corpo, si è dimostrato, che a promuovere il corpo per un dato spazietto esercitano due azioni, le quali prese insieme, sono eguali all'azione, che per lo stesso spazietto esercita l'equipollente, (*Fig.* 4) quando amendue le corde s'accorcino: e perciò ottimamente si mantiene l'egualità tra la cagione, e l'effetto; perciocchè l'azioni delle potenze laterali, che tengono il luogo di cagione, producono un effetto, cioè l'azione dell'equipollente a se perfettamente eguale. Che se accorciandosi la corda SA, la TA (*Fig.* 5) patisca distrazione, allora la differenza tra le azioni delle potenze laterali eguaglia l'azione della potenza equivalente: e perciò l'egualità tra la cagione, e l'effetto ottimamente conservasi. Concciossiachè l'azione della potenza maggiore AB in due parti dividesi: la prima delle quali impiegasi nella distrazione della corda TA, e questa eguaglia l'azione della potenza AC; l'altra parte produce l'azione dell'equipollente AD. Quel che detto si è della composizione, dicasi similmente della risoluzione. Laonde o si compongano, o si risolvano le potenze, si mantiene il principio dell'egualità tra la cagione, e l'effetto.

C. Ma d'onde è mai, che essendo ne' vostri principj la cosa sì patente, e sì chiara, siccome presentemente m'avveggio, non è riuscito al Sig. Bulffingero, facendo uso degli stessi principj, di discuoprirla.

L. A

L. A me sembra di comprenderne la cagione assai chiaramente. Osservate. Si possono instituire due comparazioni: nella prima si può mettere a confronto le azioni delle potenze laterali, agenti insieme, coll'azione della potenza equipollente; ed in questa comparazione si riferisce la cagione all'effetto; perocchè le azioni delle potenze laterali, operanti unitamente, producono, o son prodotte dall'azione della potenza equivalente. La seconda comparazione si può instituire tra le azioni delle potenze laterali, agenti separatamente, e le azioni delle stesse potenze, agenti unitamente, o l'azione della potenza equivalente: ed in questa comparazione non si ha il rapporto tra la cagione, e l'effetto: perchè le due azioni separate delle potenze, non producono ne l'azioni unite delle stesse potenze, ne l'azion dell'equipollente. Il Sig. Bulffingero, uomo per altro dottissimo, e ingegnosissimo, ha tacitamente confusi questi due paragoni, ed ha unicamente studiato di ritrovare l'egualità tra le azioni delle potenze laterali, agenti pei lati del paralellogrammo, e l'azione dell'equipollente, agente pel diametro: cosa, che non sussiste se non nell'angolo retto.

C. Ma quantunque nel secondo paragone non si riferisca l'effetto alla causa; pure non si può egli considerare, quando v'intervenga l'egualità, e quando no?

L. Volendo comparare le azioni delle potenze laterali fatte separatamente, coll'azioni delle medesime fatte unitamente, o coll'azione dell'equivalente, mentre il corpo si trasferisce da A in *a*, ad avere l'egualità è necessario metter a computo le azioni per A *p*, A *q*, non per A *m*, A *n*. Conciossiachè l'azione della potenza A B per A *m* non è eguale all'azione della stessa potenza, mentre unitamente coll'altra trasferisce il corpo per A *a*; siccome fa vedere l'inegual contrazione della corda S A. Lo stesso si dica dell'altra potenza A C. Che se si mettano a computo le azioni per A *p*, A *q*, e si paragonino coll'azione della potenza diagonale per A *a*, si ritroverà una strettissima egualità: e questa è l'unica egualità, che ritrovasi in questa comparazione, in cui non si paragona la cagione, e l'effetto.

Laonde tengo per certo non andar esenti da paralogismo coloro, i quali sapendo, che le rette A *m*, A *n*, co' moti sepa-

parati, si scorrono in quel tempo, in cui la diagonale con moto composito, hanno pensato, che le azioni per A *m*, A *n* sieno causa nella composizione, effetto nella risoluzione dell' azione per A *a*, esercitata dalla potenza equivalente, ed hanno cercato di trovare tra cotali azioni l'egualità. Questa egualità, la quale non è propria della cagione, e dell'effetto, non si ritroverà, se non se nell'angolo retto, coincidendo in tal caso i punti *m*, *n* co' punti *p*, *q*. Quindi è, che nell' ipotesi dell'angolo retto ha giudicato il Sig. Bulffingero d'aver ritrovata la necessaria eguaglianza tra la cagione, e l'effetto

Ma se (*Fig.* 4) l'angolo B A C sia acuto, si ritroverà, che l'effetto prodotto dall'equivalente, o dalle laterali agenti insieme, sarà maggiore dell'effetto prodotto dalle forze laterali moventi il corpo per A *m*, A *n*: non perchè queste, agendo insieme, s'ajutino scambievolmente, ne perchè una dall' altra insieme col corpo venga trasferita, e ciascuna agisca contra del corpo, come se rispetto a se stesse in quiete, siccome ha sospettato il dottissimo Bulffingero; ma perchè l'azioni delle potenze laterali, agenti di per se pei lati del paralellogrammo A *m*, A *n*, sono minori delle azioni delle stesse, agenti unitamente per A *p*, A *q*: essendo in così fatta ipotesi A *m*, A *n* minori di A *p*, A *q*. La qual dottrina devesi ancora trasportar al caso, in cui l'angolo B A C sia infinitamente acuto; ovvero quando le due potenze A B, A C, e l'equivalente A D, abbiano la medesima direzione. Quantunque in tal caso sia $Am + An = Aa$; pure le potenze agenti di per se per A *m*, A *n* non esercitano la stessa azione, la quale esercitano agendo insieme per A *a*: ma affinchè le azioni sieno eguali, devono separatamente agire per A *p*, A *q*, cioè amendue per A *a*.

Ed allorchè (*Fig.* 5) l'angolo B A C è ottuso, non si deve sempre attribuire all'opposizione delle potenze, che l'effetto prodotto dall'equivalente minor sia dell'effetto prodotto separatamente dalle laterali, trasportando la prima il corpo per la diagonale, le altre pei lati del paralellogrammo. Imperocchè sebbene l'angolo B A C sia ottuso, se gli angoli B A D, C A D sieno acuti, tanto è lontano, ch'una potenza sia all'altra d'impedimento, che anzi scambievolmente s'ajutano, perchè amendue esercitano azione di contrazione. Ma essendo in questo caso A *m*, A *n* maggiori, che A *p*, A *q*, le azioni delle potenze sepa-

separate per Am, An, sono maggiori dell'azioni per Ap, Aq, ovvero dell'azione della potenza equipollente per Aa.

Che se l'angolo B A D sia acuto, ma l'angolo C A D sia ottuso, allora sì, che le potenze s'impediscono l'una l'altra, e l'azione della potenza A B tanto scemasi, e perde d'energia, quanta è l'azione della potenza A C. Perocchè, siccome si è detto, l'azione della potenza A B in due parti dividesi; la prima sostiene l'azion contraria della potenza A C, l'altra promuove il corpo per Aa. Ma così fatte cose sono state spiegate abbastanza. Non resta da considerar altro, che il caso dell'angolo B A C infinitamente ottuso, nel quale devesi notare, che l'azione della potenza A C è di distrazione, onde si dee prender la differenza dell'azioni per Ap, Aq, separatamente agenti, per aver una azione eguale all'azione dell'equipollente.

N. Seguitando i principj leibniziani, e stabilendo l'azioni proporzionali agli spazj, egli è più chiaro della luce del mezzo dì, che nella composizione, e risoluzion delle forze non patisce alcuna eccezione il metafisico principio dell'egualità tra la cagione, e l'effetto. Io amerei, e lo riceverei per grazia somma, che alcun de' Signori Cartesiani, ne' principj loro, cioè facendo l'azioni proporzionali ai tempi, mi facesse vedere, che lo stesso principio mantiensi. Che se mi rispondano, che nella composizion, e risoluzion delle forze non è necessario così fatta egualità mantenere, mi permettano di dire, che mi sarà sempre l'opinion loro sospetta, finchè metta eccezione ad un principio di naturale evidenza.

L. Prima di passar oltre fate un'avvertenza, che finchè le forze trasportano il corpo nella direzione, per cui sollecitano, non vi può esser equivoco intorno agli spazj, a cui si devono proporzionar le azioni secondo l'estimazione leibniziana; ma quando il corpo non segue la direzione delle potenze, si potrebbe agevolmente cadere in paralogismo. Abbiamo lo spazio passato dal mobile; è egli questo, a cui l'azione è proporzionale? Per levar ogni equivoco io ho adoprato le corde elastiche, che colla contrazione, e distrazion loro indichino quai sieno quegli spazj, a cui le azioni sono proporzionali. E questo metodo fa vedere esser essi quegli spazj, per cui il mobile, o piuttosto la potenza si avvicina al centro delle forze. E chi

non vede, che lo stesso dee seguir colle corde elastiche, e con altre potenze, purchè egualmente si prendan gli spazj, da cui la misura delle azioni dipende.

C. La vostra teoria mi sembra così semplice, bella, e ben dedotta, che, se vera non fosse, ne avrei del rincrescimento. Contuttociò mi s'aggira per la mente una difficoltà, che ho avuto della pena a tenere in me, finchè avete dato compimento al vostro sottilissimo raziocinio. La difficoltà è la seguente. La composizione, e la risoluzione delle forze si adopra non solamente dove si tratta di movimento, ma eziandio dove trattasi di riposo, e d'equilibrio. Dunque ancor in così fatto caso dovrebbesi salvar in essa la egualità tra la cagione, e l'effetto; ma a questo fine è inutile il ricorrere all'azioni; perchè dove non si genera moto, non si esercita azione; dunque l'egualità dovrebbe tra le stesse potenze passare; la qual cosa essendo impossibile, non si dee nella composizion, e risoluzion delle forze così fatta egualità conservare.

L. Questa vostra difficoltà m'obbliga a discorrere più minutamente della natura delle cagioni, e degli effetti, ed a spiegare in qual senso l'azione della potenza equivalente si possa chiamar effetto delle azioni delle potenze laterali. Effetto altro non è, se non una mutazione di stato, che in alcun corpo producesi, come sarebbe il farlo passar dallo stato di quiete allo stato di movimento, o dallo stato di movimento allo stato d'un movimento maggiore, o minore. E questo è l'unico effetto, che s'abbia in natura, perchè tutte le altre mutazioni, che avvengono, come di figura, di consistenza ec., tutte son congiunte colla generazione, o coll'estinzione del movimento, che, se non in tutto il corpo, almeno nelle sue parti interviene. A generar cotal mutazione di stato è necessaria una forza, la quale non solamente si sforzi, ma di fatto s'impieghi, ed entri in azione; e così facendo, produrrà una mutazione di stato, la quale all'azione esercitata dovrà esser proporzionale. Ma se una forza, valevole di generar mutazione di stato colla sua azione, verrà impedita, onde veruna non ne generi; allora, premendo da tutti i lati, tenterà di produrla; ma non producendola, ne entrando in azione, non vi sarà ne vera cagione, ne vero effetto; laonde non si dovrà conservare l'egualità tra la cagione, e l'effetto. Di fatto concepite una massa fluida

fluida dotata di gravità rinchiusa in un vaso; egli è certo, che ridotte tutte le cose alla quiete, la gravità si sforzerà per ogni parte di produr cangiamento di stato in quel corpo fluido; e però verrà premuto il fondo, e i lati del vaso, anzi tutte le parti del fluido soffriranno pressione. Riducete in una somma tutte codeste pressioni, e ditemi se non è infinitamente maggiore della gravità, da cui esse dipendono? Quì non abbiamo ne vera cagione, ne vero effetto, ma solo abbiamo una forza morta, la quale per ogni verso sforzasi di farsi vera cagione, di entrare in azione, e di produr effetto, cioè cangiamento di stato.

Posto ciò, che è verissimo. Non niego, che anche nell' ipotesi dell' equilibrio sia lecito di compor, e di risolver le forze. Ma qui non abbiamo ne vero effetto, ne vera cagione; perciocchè non avvi nell' equilibrio verun cangiamento nello stato de' corpi; dunque nulla azion nella forza; e però non si può dire, che abbiamo ne cagione, ne effetto. Anzi la natura dell' equilibrio in questo consiste, che le forze per cagion dell' azioni eguali, e contrarie, che eserciterebbero, s'impediscano vicendevolmente l'una l'altra, sicchè non entrino in azione, non passino in vera causa, e non producano vero effetto. Dunque altro non abbiamo, che cagione impedita, ed effetto impedito; dunque altra egualità non ho obbligo di mantenere se non se tra la cagione impedita, e l' effetto impedito; ma questa egualità nella composizione, e risoluzione delle forze assolutamente mantiensi, quando stia salda l'egualità tra le azioni delle potenze laterali, e l'azione dell' equivalente, come tra poco si vedrà; dunque ec.

Mi resta da spiegare in poche parole, in qual senso l'azione della potenza equivalente si possa dir effetto dell' azioni delle laterali. A parlar rigorosamente, tutte le azioni son causa, e l' effetto prodotto sarebbe la mutazione dello stato, a cui è proporzionale la forza viva, che si concepisce introdotta nel corpo. Ma perciocchè due forze morte agenti unitamente producono quella stessa forza viva, o mutazione di stato, che verrebbe prodotta da una sola potenza agente, secondo quella direzione, per cui il mobile viaggia, così suolsi abbreviando dire, che questa azione è effetto di quelle. Ma l' egualità, che tra cotali azioni passa, appartiene all' egualità tra la cagione,

e l'effetto; perocchè tanto le azioni delle potenze laterali, quanto l'azione dell'equivalente dee esser eguale ad uno stesso effetto, che vien prodotto; dunque è necessario, che sieno eguali tra loro, dovendo essere le cagioni in proporzion degli effetti.

C. Questa è una qualche risposta, e bisogna contentarsi di quella egualità, che può ottenersi. Ma siccome tra le azioni delle forze, e la forza viva prodotta vi deve esser corrispondenza, così esser vi dee tra la potenza, e la pressione in caso d'equilibrio.

L. E chi ne dubita? E vi è una tal corrispondenza, per cui, se l'una l'altra non impedisse, esercitarebbero in tempo eguale azioni eguali. E vi pare picciola corrispondenza questa. Sicchè l'egualità delle azioni è quella, che sempre trionfa nella risoluzion delle forze, e nella composizione, o vi sia equilibrio, o no.

N. La cosa va più a festa, che alla prima veduta non apparisce. Se due forze sieno applicate ad uno stesso corpo, ne ve n'abbia una terza, che in equilibrio le tenga, potrò sempre in luogo d'esse surrogarne una, la quale in egual tempo eguale azione esercitando, produca quella stessa forza viva nel corpo, che quelle due produrrebbero. Se avvene una terza, che in equilibrio le fermi, potrò in luogo delle due una sola sostituire, la quale non impedita, è valevole d'esercitar egual azione in tempo eguale; onde siccome dalla terza impedite erano le azioni delle due, così verrà impedita l'azione della forza sostituita. Ho io ben penetrati i vostri sentimenti, ed ho spiegata in maniera la cosa, onde ne abbiate soddisfazione?

L. Non si potea meglio. Quindi io faccio a trattar dell'equilibrio; tanto è vero, che la mia teoria è universale, e serve a tutti i casi. Alle due potenze (*Fig.* 4, 5) A B, A C, a cui, siccome abbiam dimostrato, è equivalente la potenza A D, si aggiunga la terza potenza A *d* eguale, e contraria alla A D: e tali potenze io le suppongo le elasticità delle tre corde S A, T A, *d* A, come sopra. Si concepisca farsi un infinitesimo movimento per lo spazietto A *a*. In questo moto, mentre le due corde S A, T A si accorciano per gli spazj A *p*, A *q*, la corda *d* A si distrae per lo spazio A *a*: ma dalle cose dette si sa, che

le due

le due azioni per gli spazj A*p*, A*q* delle potenze AB, AC eguagliano l'azione della potenza AD per A*a*, ovvero della potenza A*d* per la stessa A*a*; dunque eguali saranno quelle azioni, che in parti opposite in egual tempo si dovrebbero esercitare. La qual cosa non potendo assolutamente accadere, ne seguita, che il caso aver si debba dell' equilibrio.

Laonde voi vedete, che la causa dell' equilibrio altra non è, se non l'egualità delle azioni contrarie, che necessariamente nello stesso tempicello si avrebbero ad esercitare. Il qual principio ha luogo, o l'una e l'altra potenza faccia angolo acuto colla direzione dell'equivalente, o l'una d'esse, come (*Fig.* 5) AC, faccia angolo ottuso. Conciossiachè in quest' ultimo caso le potenze A*d*, AC sono cospiranti, e consenzienti, perchè distratta la corda A*d*, patisce distrazione ancor la corda TA, e l'azioni d'amendue, prese insieme, sono eguali all'azione della potenza AB.

N. Questo è un principio fecondissimo, con cui si può tutta la meccanica dimostrare; giacchè da tre potenze si passa a quattro, da quattro a cinque, e così all'infinito, dimostrandosi in tutte, che l'equilibrio dipende dall'egualità delle azioni contrarie.

L. A voi, che siete perfettamente informati delle cose meccaniche, sarebbe superfluo il dimostrare di quattro, cinque, e più potenze ciò, che si è dimostrato di tre. Solamente io avvertirò, che il famoso teorema dell'incomparabile Sig. Giovanni Bernoulli, il quale è stato dimostrato in tutte le macchine dal dottissimo Sig. Varignon, non è altro, che una conseguenza dell' egualità tra le azioni contrarie, che è necessaria in ogni equilibrio. Il teorema Bernoulliano è il seguente. In ogni equilibrio di quante, e quali potenze si vogliano, in qualunque maniera applicate, e agenti per qual si sia direzione, la somma delle energie positive, è eguale alla somma delle energie negative, purchè come affermative si prendano. Per nome d'energia, il Sig. Bernoulli altro non intende, se non se il prodotto della potenza nella velocità virtuale della stessa potenza; la quale sarà positiva, se seguita la direzion della potenza, sarà negativa, se seguita la direzione opposita. E chi è che non veda, che la velocità virtuale della potenza è proporzionale allo spazio, per cui il corpo, o la potenza s'avvici-

vicina al centro delle forze; ovvero se le potenze sieno corde elastiche alla contrazione, o distrazion delle corde. Dunque l'energia bernoulliana è la stessa, o almeno proporzionale a quella, che per noi chiamasi azione della potenza.

C. L'equilibrio esige, che niun moto segua; e voi avete dimostrato, che poste tre potenze in equilibrio, se il moto si faccia secondo la direzione della potenza equivalente a due, le azioni contrarie saranno eguali. Ma saranno elleno eguali le azioni contrarie, se il moto segua per qualunque altra direzione, (*Fig.* 8) per esempio AL?

L. Sì, Signore, saranno eguali; ed eccovene la dimostrazione, dedotta immediatamente dall'egualità dell'azioni contrarie, quando il moto segua per la direzione dell'equipollente alle due AB, AC. Esprimendo dunque i due lati del paralellogrammo AB, AC due potenze, e la diagonale AD l'equivalente ad esse, supponghiamo, che il movimento si faccia per qual si voglia direzione AL per l'infinitesimo spazio Ae. Dal punto e si menino ea, ex, ey perpendicolari alla diagonale, ed ai lati del paralellogrammo. Di più dal punto a si menino normali ai lati le rette ap, aq. Dico, che se $AD.Aa = AB.Ap + AC.Aq$, sarà ancora $AD.Aa = AB.Ax + AC.Ay$. Si congiunga pq; e si noti il punto o, ove le due rette aq, ex si tagliano. I due triangoli aoe, paq sono simili, perchè gli angoli aoe, paq sono alterni, per riguardo alle paralelle ap, ex. In oltre, se sopra la retta Aa, come diametro, si descrivesse un circolo, passerebbe per li punti p, q, e toccherebbe la linea ae normale al diametro; dunque l'angolo eaq, fatto dalla tangente, e dalla secante, è eguale ad apq, contenuto nel segmento alterno. Sono dunque simili i triangoli oea, paq; dunque $eo : oa :: aq : ap$; ma $eo : oa :: yq : px$; di più $aq : ap :: DC : DB :: AB : AC$; dunque $yq : xp :: AB : AC$, e il rettangolo $AC.yq = AB:xp$. Si aggiunga dall'una, e dall'altra parte $AC.Aq + AB.Ax$, e si avrà $AC.\overline{yq + Aq} + AB.Ax = AC.Aq + AB.\overline{Ax + xp}$; ovvero $AC.Ay + AB.Ax = AC.Aq + AB.Ap$; ma per l'ipotesi $AC.Aq + AB.Ap = AD.Aa$; dunque $AD.Aa = AC.Ay + AB.Ax$.

Fatta questa dimostrazione, avvertite, che se il movimento segue

segue per l'infinitesima Aa nella diagonale, si è fatto vedere, che l'azione dell'equivalente eguaglia le azioni delle potenze laterali; dunque si ha $AD.Aa = AB.Ap + AC.Aq$; dunque per quel, che si è dimostrato al presente $AD.Aa = AB.Ax + AC.Ay$. Ma se il moto si faccia per Ae, l'azion della potenza AD, è $AD.Aa$, della potenza AB, $AB.Ax$, della AC, $AC.Ay$; come ti manifesteranno le corde elastiche, se le porrai in luogo d'altre potenze; dunque ancorchè si promova il corpo per AE, l'azion della potenza AD è eguale all'azioni delle due potenze AB, AC. Per la qual cosa se obbligherò la potenza AD ad agire in senso contrario, vi sarà eguaglianza tra l'azioni contrarie, che in egual tempo si devono esercitare.

N. Bisogna secondare i pensieri improvisi, che ad una mente applicata si affacciano, qualunque sia l'esito, che possano avere. Sieno due potenze AB, AC, (*Fig. 9*) la cui equivalente sia AD. Concepiamo qualunque altra direzion AL, nella quale devasi far il moto. Voi avete dimostrato, che lasciata dal punto D sovra la AL cader la normale DL, la potenza AL, sarà l'equivalente alla potenza AD. Similmente condotte BM, CN alla stessa AL normali, la AM equivalerà alla AB, la AN alla AC; dunque se $AM + AN = AL$, è chiaro, che le due potenze equivalenti alle due AB, AC, saranno eguali alla potenza equipollente all'AD nella direzione AL.

Veggiamo se $AM + AN = AL$. Per ciò dimostrare basta, che $AM = NL$. Si noti il punto P, ove BM taglia la diagonale AD, e si produca CN in Q, e dai punti B, C si menino alla diagonale le normali BH, CK. E' manifesto, che i due triangoli BPH, CQK, fatti da paralelle, sono simili; e perchè $BH = CK$, ancora eguali in tutto; dunque $PH = KQ$; ma $AH = DK$; dunque $AP = DQ$; dunque, essendo PM, QN, DL parallele, sarà ancora $AM = NL$; dunque $AM + AN = AL$; dunque le due potenze AB, AC hanno nella direzione AL la stessa equipollente, che AD; dunque tanto le azioni delle potenze AB, AC, quanto l'azione della potenza AD, agenti per la direzion AL, saranno eguali all'azione della medesima equipollente potenza AL; dunque eguali tra loro; e però, se si obblighera la AD ad agire in

te in ſenſo contrario, l'azioni contrarie nella direzion A L ſaranno eguali; e però non potrà ne pur in queſta direzione ſeguir movimento, ed ancor per riguardo ad eſſa vi ſarà equilibrio.

C. Il progreſſo della voſtra dimoſtrazione mi piace aſſai, e domanda minor attenzione, che la prima ſtudiatiſſima, che il Sig. Lelio ci ha favorito di eſporre. Queſti ſon principj fecondi, e veggio, che con eſſi ſi può far paſſaggio a quattro, a cinque, anzi ad infinite potenze, veggio, ch'eſſi applicar ſi poſſono immediatamente a tutte quante le macchine. Ma queſte ricerche, deviandoci dalla materia propoſtaci, ſarà bene ometterle.

L. Noi non ſiamo quì congregati per formar una novella meccanica, dedotta dal principio dell'egualita tra l'azioni contrarie, che l'equilibrio produce. Ma entrati ſiamo in queſta ricerca, perchè d'eſſa abbiamo avuto biſogno per iſtabilire, che l'azioni debbono eſſer proporzionali alle potenze, e agli ſpazj, perchè altrimenti nella compoſizione, e riſoluzion delle forze non ſi può conſervare l'egualità tra la cagione, e l'effetto. Contuttociò amerei, che i principj or or ſtabiliti ſi applicaſſero ad una qualche macchina, perciocchè è neceſſaria così fatta ricerca per diſcuoprire un ſottile paralogiſmo di molti leibniziani, anzi del Leibnizio medeſimo, che li ha condotti ad una falſa eſtimazion dell'azioni, e con ciò daremo fine alla preſente giornata.

N. Prendiamo per eſempio la leva, o la ſtadera romana. Siavi il vette A B, (*Fig.* 10) il cui fulcro ſia C, a cui ſieno applicate due potenze paralelle, e normali al vette A D, B E, che facciano tra loro equilibrio. In luogo de' peſi, che ſoglionſi uſare, io metto in opra due corde di cetra A D, B E, le cui lunghezze indichino le loro elaſticità, ed in qualunque luogo ſi collochi nel vette la maſſa M. Supponiam farſi un movimento infiniteſimo, per cui il vette A C B paſſi nel ſito infinitamente vicino aCb. E' manifeſto, che la corda B E ſi diſtende per l'elemento Bb, intanto che la corda A D ſi accorcia per l'elemento Aa; dunque l'azione di contrazione di queſta ſarà $AD.Aa$, e l'azione di diſtrazione di quella ſarà $AE.Bb$: le quali due azioni, perchè il vette ſtia in equilibrio, è neceſſario, che ſieno eguali. Dunque ſarà $DA.Aa=$

B E.

BE.Bb; ovvero passando all'analogia AD : BE :: Bb : Aa :: CB : CA; cioè a dire le potenze in ragion reciproca delle distanze dal fulcro; il qual caso fu noto sino agli antichi appartener all'equilibrio, ed era il principio loro, con che maneggiavano la meccanica statica.

C. Rendiamo la dimostrazione più universale, supponendo, che le direzioni delle potenze non sieno ne perpendicolari al vette, ne paralelle. Applico, dunque, al vette ACB, il cui fulcro sia C, (*Fig.* II) due corde elastiche, già distratte SA, TB, le cui potenze sieno AD, BE, le quali voglio, che sieno in equilibrio. Suppongo, che si faccia un infinitesimo movimento, e che il vette passi nel sito aCb. E' manifesto, che le corde elastiche passeranno nei siti Sa, Tb; dunque co' centri S, T, descritti gli archetti ap, bq, la contrazione della corda SA sarà Ap, e la distrazione della corda TB sarà Bq; dunque ad aver l'equilibrio sarà di mestieri, che DA.Ap = EB.Bq, ovvero DA : EB :: Bq : Ap, o sia in ragion composita di

Bq : Bb
Bb : Aa
Aa : Ap;

ma condotte alle direzioni delle potenze le normali CH, CK, sarà per la similitudine de' triangoli Aap, CAH; Bbq, CBK; e de' settori ACa, BCb, Bq : Bb :: CK : CB; Bb : Aa :: CB : CA; Aa : Ap :: CA : CH; dunque DA : EB in ragion composita di

CK : CB
CB : CA :: CK : CH,
CA : CH,

cioè le potenze in ragion reciproca delle perpendicolari, che alle direzioni loro si menano; la qual' è una proposizione notissima.

L. Elegantemente. Ma non siam quì per mettere in veduta tutta la teoria delle leve, che dalla legge della composizione, e della risoluzione ha con somma accuratezza dedotta il Sig. Varignon. E siccome la composizione, e risoluzione dipende dall'egualità dell'azioni, così dall'egualità dell'azioni contrarie si può certamente dedurre tutta la teoria dell'equilibrio nel vette, anzi in tutte le altre macchine. Passiamo a quello che spetta a noi. In primo luogo vorrei, che fissaste ben bene, (*Fig.* 10) che ne la grandezza, ne il luogo del cor-

po M conferisce punto all'equilibrio delle potenze, alla cui applicazione, e grandezza soltanto si dee por mente. Che se le potenze non fussero in equilibrio, onde dovesse seguir movimento, allora per aver la giusta velocità, e la posizione, e la grandezza del corpo M bisognerebbe dedur in computo.

In oltre io vorrei, che penetraste ben la ragione, per cui parecchi filosofi, ancor di quelli, che misurano le forze vive dal quadrato delle velocità, seguitando lo stesso Leibnizio, han giudicato, che le forze morte, o le loro azioni sieno, siccome le quantità del movimento. Se da' punti A, B della leva ACB, dicon essi, sieno sospesi due corpi A, B, le cui masse, e per conseguenza i cui pesi sieno in ragion reciproca delle distanze dal fulcro C, è noto, che riposano in equilibrio. Laonde se si concepisca seguire un moto infinitesimo, l'azioni delle due potenze, cioè de' due pesi, dovranno esser eguali; ma ancor eguali sono le quantità del moto nell'uno, e nell'altro corpo, perchè le velocità virtuali sono, come le distanze dal fulcro, e per conseguenza in ragion reciproca delle masse; dunque l'azioni delle potenze sono, come le quantità del movimento. Che giudicio formate di così fatto raziocinio?

C. Che dubbio v'ha? Le quantità del moto sarebbero certamente in tal caso, come l'azioni, essendo l'une, e l'altre eguali.

N. Eh questo non si può certamente metter in dubbio. Ma la domanda del Sig. Lelio versa sopra di questo; se da cotal raziocinio si possa dedurre, esser l'azioni delle forze morte in proporzione delle quantità del moto per esse prodotte. In me fa nascere non leggiero sospetto la riflessione, che avete premessa. Imperciocchè se in luogo de' corpi, le cui gravità son le potenze applicate al vette, io sostituisco due corde elastiche, dotate delle stesse potenze, e le masse de' due corpi unite insieme, e qualunque altra massa io colloco in M; egli è certo, che si avrà l'equilibrio, che concepito un moto infinitesimo, le azioni delle due potenze elastiche saranno eguali: ma dove avremo in tal caso le due quantità del movimento, che con esse si possano comparare? Questo dà ragionevole indizio, che nel discorso, che avete esposto, vi stia nascosa qualche sottile fallacia, ch'abbia condotto in errore quegli uomini grandi, ed oculatissimi.

L. E

L. E pure la fallacia è patente, e visibile: e voi medesimi per poco, che vi faccia riflettere, la vedrete palpabile. Osservate per qual direzione agiscano le gravità, o l'altre forze A D, B E.

C. E' chiaro, che mentre il corpo A si muove da A in *a*, seguendo la direzione della forza, onde è animato, il corpo B si porta da B in *b*, seguendo una strada del tutto opposta a quella, per cui lo vorrebbe condurre la forza B E.

N. Oh Dio! Come la mente umana alcune volte pare stolida! E come volete mai che la quantità del moto, che in *b* ritrovasi avere il corpo B, provenga dalla gravità B E, mentre questa lo sollecita per la direzione opposita da B verso E? Nel fatto raziocinio si paragonano le quantità del movimento, di cui sono dotati i corpi A, B colle azioni delle potenze A D, B E, siccome effetti colle cagioni. La qual cosa è falsissima, non potendo mai la quantità del moto del corpo B provenire, ed esser effetto dell'azione della forza B E.

L. Non ve lo dissi io, che l'origine del paralogismo l'avreste scoperta per voi medesimi. Per altro eccovi la vera economia del movimento ne' principj già stabiliti, ch'io credo veri. La differenza delle due azioni delle potenze elastiche A D, B E (se ne dovrebbe prender la somma, se l'una corda, e l'altra si accorciasse) si applica a tutte le masse, ed in esse tanta velocità produce, onde l'effetto alla detta differenza venga ad esser proporzionale. L'effetto poi, quando il movimento incominci, è la somma di tutti i prodotti, che nascono dalla massa moltiplicata nella metà del quadrato della sua velocità. Nella nostra ipotesi, essendo eguali, e contrarie l'azioni, e nulla la differenza dell'azioni contrarie, niun effetto si produrrà, e per conseguenza di nulla velocità verranno ad esser dotate le masse. Che se il moto non incomincia, ma si accellera, o si ritarda, l'effetto sarà la somma di tutti i prodotti della massa, della velocità, e del suo incremento, o decremento: il qual prodotto è proporzionale alla differenza del prodotto, che si forma dalla multiplicazion della massa nella metà del quadrato della velocità.

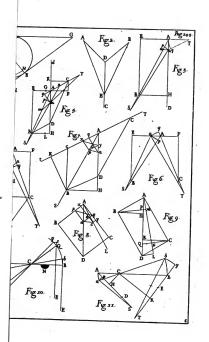
Dopo tutto ciò richiamate alla memoria i principj metafisici, che abbiamo l'altro jeri stabiliti, e lascio a voi il giudicare, a quale delle due leggi meglio si accommodino, se a

 quella

quella de' tempi, ovvero a quella degli spazj. Osservate in qual delle due si salvi sempre mai l'egualità tra la cagione, e l'effetto, ed a quale, siccome a principio, si riducano le verità sin or dimostrate.

N. Come la cosa mi riesce nuova interamente; così quantunque sembrimi d'averla ben penetrata; pure ho bisogno di meditarvi sopra riposatamente. Ed al presente la lunga applicazion m'ha stancato: però lasciamo omai i discorsi scientifici, e di applicazione, ed andiamo a sollazzare, ed a prender aria, ora che nel cader del sole a rinfrescar s'incomincia.

GIOR-

Pag. 244.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

GIORNATA OTTAVA.

INTERLOCUTORI.

Lelio, Nestore, Cesare.

L. IO debbo dichiararvi in questa giornata quella ragione, la quale dopo una lunga indifferenza, e dubitazione ha terminato di convincermi, e m'ha condotto alla parte leibniziana. Ma per sentirne il peso, e la forza desidererei sommamente, che vi spogliaste affatto d'un pregiudicio, che è molto comune alle persone letterate, e studiose. Questo nasce da un soverchio amore, e da una smoderata stima di quegli studj, a cui o per ventura, o per elezione ci siamo applicati.

N. Ad assicurarci della forza, onde s' impadronisce dell'animo umano un tal pregiudicio, basta fissar gli occhi nelle persone di lettere, le quali si conoscono, o si sono nell'addietro conosciute, e dal lor parlare si vedrà chiaro, quanto poche da un tal affetto agli studj loro sieno sgombrate. Se parlerete con un uomo agli studj sagri applicato, udirete, che le sagre facoltà sono l'unica applicazione, degna d'un uomo, che tutte le altre son bagattelle da lasciarsi, per dir così, a fanciulli per trastullo, o alle genti oziose per passatempo, che la mente umana, creata per Dio, non rimane appagata se non ragionando di Dio, e delle cose ad esso spettanti. All'opposito un geometra assuefatto al sottile, e preciso raziocinare, dice in contrario, che gli studj sagri non hanno altro di buono se non l'obbietto, di cui favellano, che per altro son opera di pura memoria, in cui poco o nulla l'ingegno, ed il sottile filogizzare richiedesi, che la geometria è l'unica scienza, in cui si fa chiaro, quanta sia la penetrazione dell' umano intelletto, quando da' veri principj, e dal retto metodo sia condotto. Un poeta reputa tutte l'altre facoltà aride, smunte, nojose, e stucchevoli. Un medico, ed un legista si ride di chi consuma il tempo in apprendere altre cognizioni inutili, ed infruttuose. E rado assai si trova nel mondo persona di così retto giudicio, che colla moderata stima, onde i suoi studj riguarda, congiunga quella stima, che è dovuta alle altre facoltà, e scien-

ſcienze, le quali, a cagione del corto umano intelletto, che a tutto non può applicarſi, è coſtretto d'abbandonare, laſciandole interamente all'altrui coltura.

C. Non ſolamente tra que', che impiegano il tempo in diverſe ſcienze, ma eziandio tra i profeſſori della medeſima facoltà ho oſſervato ſovente un tal pregiudicio regnare. Ad un geometra, il quale non ſi attentava d'entrare in coſe fiſico-matematiche, ho udito dire, che toſto che la geometria entra in fiſica, perde del ſuo rigore, e della ſua evidenza, e che per conſeguenza ſi ſpoglia della ſua migliore prerogativa. All'oppoſito i fiſico-matematici avviſano, che le belle ſcoperte, fatte nella geometria, devono ſervir di metodo per illuſtrare le coſe fiſiche, e diſcuoprire le ammirabili leggi, ed operazioni della natura. Così tra' poeti, chi ha preſo l'uſo di poetare nella noſtra volgar favella, non tiene in gran prezzo, chi ama di verſeggiare latinamente; perciocchè, dicon eſſi, non è poſſibile il conſeguir collo ſtudio le grazie, e l'eleganza d'un linguaggio già eſtinto. Ho udito chi colla lettura dell' eccellenti opere di Virgilio eraſi talmente imbevuto della maniera di penſare, e d'eſprimerſi propria di quell'Autore, che quando aſcoltava un poema in altra foggia compoſto, come, a cagion d'eſempio, un poema fiſico, formato coll'eſpreſſioni viviſſime di Lucrezio, ſenz'altra diſamina, ſe ne corucciava, adiravaſi, e ne ſparlava pubblicamente, come ſe altra buona maniera di ſcrivere ritrovare non ſi poteſſe, fuori di quella, che avendo appreſa colla lettura, egli amava più del dovere.

L. Non ſo intendere, come mai uomini d'ingegno, e d'avvedutezza forniti ſi laſcino affaſcinare così dalla ſtima d'un qualche autore, per altro celebre, e grande, che ſi vendano ad eſſo in una totale ſchiavitù, riputando un graviſſimo delitto il non penſare, e il non iſcrivere, ſiccome egli ha ſcritto prima, e penſato. E pure ſe vi prenderete la pena di leggere le prefazioni d'una buona parte de' comentatori, vedrete, che ſon di queſto carattere. L'autore, ch'eſſi prendono a comentare è l'ottimo; a petto a lui tutti gli altri ſono, come i minuti pigmei appreſſo i vaſti giganti. Egli è quell'uomo, che la divina provvidenza ha mandato al mondo, perchè dia lume, e ſia norma a' poſteri. Il libro, che ſi comenta, è il più utile, che ſia uſcito giammai, e la miglior parte della

ſcien-

fcienza, e della felicità umana è pofta nel ben intenderlo, e penetrarlo, e d'altre cofe di tal natura fono que' proemj riempiuti. Parlando poi de' filofofi, lafcio di dire, per quanti fecoli fienfi gittate le vigilie, e gli ftudj, non nel ricercare la verità, ma nell'inveftigare la mente d'Ariftotele, e nello fpiegarne i detti ofcuriffimi, come fe la verità aveffe parlato per bocca di quel filofofo. Spezzato il duro ariftotelico giogo, non picciola turba di novelli filofofanti fi è donata fchiava al Cartefio, uomo per altro maffimo, feguendo ciecamente il fuo metodo, e riputando oracolo ogni fuo detto. Voi, Sig. Neftore, forridete, tenendo gli occhi fifi nel Sig. Cefare. No. Il Sig. Cefare, dalla lunga converfazione con uomini amanti della filofofica libertà, ha imparato a fcuoter la fervitù, ed a penfare col proprio intelletto, confervando la dovuta, e ragionevole ftima a quell'uomo fommo, a cui la filofofia di moltiffimo è debitrice. Avvi ancora chi non penfa fe non coll'intelletto del Newton, e chi gli altri accufa, perchè dilungati fi fieno da fuoi fentimenti. Avvi chi non fa contraddire al Leibnizio, e reputa per indocile chiunque il fuo fiftema interamente non riconofce per vero. Il Cartefio, il Newton, il Leibnizio fono uomini ingegnofiffimi, e grandi, e maligno farebbe, chi non li ricolmaffe di fomme lodi; ma fono uomini, che vale a dire fallibili, e il cui intelletto, per altro penetrante, non vedea tutto. Però bifogna prenderli in mano con animo di efaminare ciò, che hanno fcritto, di approfittarfi delle molte, e belle verità, ch'hanno fcoperte, di correggere, dove alcuna volta hanno errato, e di portar innanzi la fcienza con nuovi ritrovati, e fcoperte. Così effi fatto hanno con quelli, che li han preceduti, e così facendo, fonofi avanzati in dottrina, ed hanno refa più perfetta la fifica, e la geometria; lafciando efempio a pofteri del metodo, che vuolfi tenere per divenir buon filofofo, e buon geometra.

N. Io ho fempre dentro di me ammirata la moderazione de' più dotti tra gl'italiani, i quali avendo avuto nella nazion loro il Galileo, quell'uomo fommo, e non mai abbaftanza lodato, il quale è ftato il primo promotore della fcienza fificomatematica, traendola fuori dall'obblivione, in cui dopo Archimede era miferamente giacciuta, e arricchendola di novelle teorie, che fono ftate principj fecondi di vaftiffime fcienze,

pure

pure, comunque d'un tanto fcrittore fienfi con ragione gloriati, non l'hanno però idolatrato giammai; anzi hanno con ingenuità confeffati alcuni paralogifmi, in cui quell'acuto uomo è caduto. E ciò tanto non ha portato danno ne alla gloria loro, ne a quella del Galileo, ch'anzi l'hanno colla docilità vie più bella refa, e fplendente.

C. Tutte quefte fono utiliffime rifleffioni; ma non veggio in qual guifa riufcir poffano al noftro termine.

L. A paffo a paffo condurrò la cofa, dove avea in animo. Da quefto pregiudicio di troppo ftimare gli ftudj proprj fuol nafcere alle volte, che fe taluno o difcuopre una verità, o almen ne dimoftra una già fcoperta, con un novello metodo di fua invenzione, egli lo efalta, e lo porta alle ftelle, chiamandolo il più fecondo, il più femplice, il più elegante di quanti fienfi adoperati giammai; in fomma di tutte le belle prerogative lo crede ornato. Io fo, che maffimamente nella geometria i primi metodi fogliono effere inviluppati, e confufi, e che collo ftudio fe ne ritrova de' più facili, e più fpediti. Ma non è però, che dal fuo inventore, a quando a quando non fi efageri la bellezza del metodo ritrovato. Vorrei però, che de' metodi per noi fi faceffe la giufta ftima, e non fi anteponeffe un all'altro, fenza una matura, e diligente difamina.

N. Non crederei, che per alcun di noi foffe neceffario un tale ricordo.

L. Il pregiudicio potrebbe riufcire tanto più pericolofo, quanto foffe più nafcofo, e lontano dall'amor proprio. Se v'aveffe un metodo, di cui tutti i geometri ferviti fi foffero fempre mai, ed a cui foffimo debitori delle migliori, e più importanti fcoperte, quanto farebbe facile, che col lungo ufo, fcuoprendone la fecondità, e l'eleganza lo collocaffimo fopra tutti gli altri per riguardo a tutte quante le qualità, fenza altra difamina. E ciò fi potrebbe fare con tanto minor fofpetto d'operare con pregiudicio, quanto che non lo riputiamo più noftro, che di tutti gli altri fifico-matematici. Quefto appunto è il metodo volgare, e ordinario, con che trattate fi fono finora le quiftioni meccaniche. Egli è ftato in prima meffo in pratica dal Galileo, indi abbracciato da tutti i geometri venuti dopo di lui. Con effo s'è incominciata, portata innanzi, e perfezionata la meccanica; ficchè non v'ha metodo alcuno, che

che ſcoperte abbia tante verità, e più importanti. Egli per ſe medeſimo è ſpedito facile, e ſicuro, e d'una ſomma eleganza adornato. Tante prerogative però congiunte col lungo uſo, e dirò così, col poſſeſſo acquiſtatoſi per più di cent'anni, non vorrei, che appreſſo di noi aveſſero tale forza, onde ſenz'altro eſame portati foſſimo ad anteporlo ad ogni altro metodo in tutte quante le coſe. Nella diſamina però, che faremo, ſtia lontano dalle noſtre menti quell'amore ſoverchio, con che ſiam uſi di rimirare gli ſtudj noſtri paſſati, e ſgombri d'ogni paſſione, proccuriamo quella indifferenza, che è ſempre mai ſtata neceſſaria ad ogni retto giudicio.

Dando dunque principio, io vi domando: qualor ſi è trattato di determinare la velocità d'un mobile, il quale viaggia per una curva, o per un piano inclinato, a cagione d'una forza continuamente applicata, di qual metodo ſonoſi ordinariamente ſerviti i geometri?

N. Eccolo. Sia (*Fig.* 1) una curva, o piano inclinato A B, ed un corpo in M, obbligato a far viaggio per queſta curva. Ad eſſo ſia attaccata la corda elaſtica M T, la cui potenza ſia M F. Il metodo volgare porta, che condotta la tangente M P ſi laſci ſopra di eſſa cadere la normale F P. Indi così diſcorraſi. La forza M F ſi riſolve nelle due M P, P F; queſt'ultima non influiſce per nulla nel moto, impiegandoſi unicamente a premer la curva, da cui con contraria preſſione è ſoſtenuta; dunque baſta conſiderar la forza M P, per rapporto a cui varranno le leggi ordinarie, cioè $MP . dt = M du$, $MP . Mm = M u du$.

L. Così è, ed il metodo è giuſtiſſimo. Ma queſto è un metodo de' geometri, non il metodo della natura; perciocchè la forza M P non avvi in natura, ne in alcuna maniera entra in azione; ma è una forza ſurrogata da' geometri a compier lor dimoſtrazioni.

C. Che importa il conſiderar piuttoſto la forza M F, che la forza M P, quando e dall'una, e dall'altra ſi raccolgono le ſteſſe giuſtiſſime conſeguenze.

L. Nulla per quel che riguarda lo ſtabilire le giuſte velocità del mobile; moltiſſimo per quel che riguarda il diſtinguere quella legge, per cui ſi vuol miſurare l'azione. Concioſſiachè quella legge è la principale, quella dee contenere la

vera misura dell'azione, e l'egualità tra la cagione, e l'effetto, la quale è universale, ed è vera, non tanto per riguardo alla forza MP, sostituita da' geometri, ma non adoprata dalla natura, quanto per riguardo alla forza MF, che la natura mette veramente in azione. Osservate ora quale delle due leggi nella forza MP abbia luogo, se amendue, ovver solamente quella degli spazj.

N. Tutti convengono, che per riguardo alla forza MP vagliono amendue le leggi; onde sia $MP.dt = M.du$, $MP.Mm = Mudu$. Facciamo ora centro in T, e coll'intervallo Tm descriviamo il minimo archetto di cerchio mn. Essendo simili i triangoli MPF, Mnm, si verificherà, che $MP.Mm = FM.Mn$; ma $MP.Mm = Mudu$; dunque $FM.Mn = Mudu$; dunque anche per rispetto alla forza MF vale la legge degli spazj, quando per nome di spazio s'intenda quello, per cui il mobile, o la potenza al centro delle forze avvicinasi, siccome jeri si è stabilito. Ma la legge de' tempi certamente non ha luogo nella forza MF; perchè essendo MF maggior di MP, non potrà mai essere che $MF.dt = MP.dt$; dunque ne pure potrà verificarsi, che $MF.dt = Mdu$, nella qual formula si contien la legge de' tempi.

L. Credo, che questo solo basti a far conoscere quale delle due leggi sia la principale, e contenga la giusta misura dell'azione. Supposto poi la misura dell'azione rappresentarsi dal rettangolo $MF.Mn$, io renderò l'ultima ragione, perchè i geometri sostituiscano la forza MP. Se io domandassi a' Cartesiani, perchè sia lecito di sostituire MP in luogo di MF, risponderanno, perchè si dimostra una forza essere equivalente all'altra; ma non possono rispondere d'avvantaggio, s'io proseguirò a domandare, qual'è la ragione di cotal equivalenza. Io oltre di ciò condurrò la risposta ad un più alto principio, e dirò, che una è equivalente all'altra, perchè nel trasportare il corpo per Mm, esercitano la medesima azione. Vedete dunque qual sia quella legge, a cui le altre da' geometri adoperate riduconsi.

La ragione poi, perchè tra tutte le infinite equipollenti, ed esercitanti eguale azione si sostituisca particolarmente la MP, si è, perchè per rapporto a lei sola vale la legge de' tempi, cioè $MP.dt = M.du$; ma per rapporto a tutte quante le

te le altre cotal' egualità non ha luogo; perchè questa legge vale unicamente, quando la direzione del moto seguita la direzione della potenza.

C. Ma la MP è veramente la forza, che sollecita al moto; perciocchè MF s'impiega parte nel premere il piano, o la curva, parte nel sollicitare il mobile al moto. Or fatta la risoluzione PF preme il piano, MP sollecita al movimento.

L. Questo è il discorso, che ordinariamente s'usa per determinare la velocità, e gli altri fenomeni del movimento pel piano, o per la curva; e il discorso va bene; perchè è sempre lecito di surrogare una potenza equivalente. Ma torno a ripeterlo, cotal potenza non è in natura, non entra in azione; ma solo entra in azione la potenza MF; e per vederlo meglio supponetela una corda di cetra.

C. Ma dunque la pressione, che il piano, o la curva patisce, non farà nulla.

L. Sebbene di cotal potenza, onde vien premuto il punto M, l'azion sia nulla; pure in virtù di questa dee accadere, che l'azione della forza MF in un dato tempo sia minore di quello, che sarebbe stata; ma l'effetto sarà sempre proporzionale all'azion, che s'esercita. E per questo universalmente, e senza eccezione sempre mai varrà la formula $fds = mudu$, quando per s s'intenda non lo spazio scorso dal mobile, ma quello, per cui il mobile al centro delle forze si accosta.

N. Ritorniamo là d'onde siamo partiti, e raccogliamo in poco il discorso. Quella legge deve esser la principale, dee includere l'azione della potenza, e la forza nel corpo transfusa, cioè l'egualità tra la cagione, e l'effetto, la quale è sempre costante, e si verifica sempre nella stessa maniera; quella poi, la quale, perchè abbia luogo, esige, che in vece delle forze, che abbiamo, se ne sostituiscano altre con discorso geometrico, non può esser la principale, ma l'accessoria; ma posto un corpo sopra d'un piano inclinato, la legge, che riguarda gli spazj, onde il mobile al centro delle forze s'accosta, rimane invariabile, e adoprando la stessa forza, che abbiamo, si trova vera; in quella, che riguarda i tempi, acciocchè vaglia, fa di mestieri cangiar la forza, sostituendone una equipollente, la qual solleciti, secondo la direzione, che il mobile dee tenere; dunque questa è l'accessoria, l'altra la principale; questa di-

mostra una condizione, che non ha luogo, se non dove il mobile della forza segue la direzione; quella dinota l'egualità indispensabile tra la cagione, e l'effetto.

L. Di quì nasce, che a determinar la velocità d'un mobile, che viaggia per una curva, la cosa è facilissima. Percciocchè la velocità, onde il mobile è fornito, sarà quella stessa, che lo stesso mobile avrebbe, se avesse seguitata la direzion della forza, quando si trovasse in egual distanza dal centro delle forze. Per esempio, sia disceso per la curva il mobile da A in M, spinto dalla forza, che tende al centro T. Fatto centro in T, coll'intervallo TM, si descriva l'arco MQ, che incontra la retta AT nel punto Q, il mobile in Q, M, spinto dalla stessa forza, si troverà avere la stessa velocità. La ragione si è, perchè la forza e nell'un caso, e nell'altro esercita la stessa azione; dunque nel corpo la stessa forza viva trasfondesi; dunque ancor la stessa velocità. A determinar poi il tempo, bisognerà far uso d'un'altra regola, e questa sarà, che il tempicello è sempre proporzionale allo spazietto, che il mobile scorre, diviso per la velocità; e sarà necessario instituire un somigliante discorso. Poichè si è $FM . Mn = Mudu$, ed $FM : MP :: Mm : Mn$, onde $FM . Mn = MP . Mm$, avremo $MP . Mm = Mudu$, ovvero $MP . \frac{Mm}{u} = Mdu$; ma $\frac{Mm}{u} = dt$; dunque $MP . dt = Mdu$; e questa sarà la nota legge de' tempi.

C. Questa è una ragione non più prodotta, e incomincio a sentirne il peso, sembrandomi molto chiaro, che la legge, la qual la misura dell'azioni contiene, dee esser vera per rispetto a tutte le forze, da cui viene esercitata l'azione.

L. Ma essendo omai tempo di portar i nostri riflessi sopra d'altra materia, debbo avvertire, che ne' penduli isocroni le velocità angolari debbono esser eguali, la qual cosa, essendo per se stessa manifesta, basterà averla notata, per farne in progresso quell'uso, che darà alla dimostrazione maggiore semplicità. Fin ora abbiamo considerato un corpo, che viaggia per una curva, sollecitato da una forza, che in lui risiedeva. Al presente concepiremo una verga rigida MC (*Fig.* 2) mobile intorno al punto fisso C, a cui sia unita in A la massa A, ed a

ed a cui sia applicata in M la forza MF. Ditemi di grazia quali saranno le leggi del movimento.

C. Al braccio MC, condotta la perpendicolar MP, converrà risolver la forza MF nelle due PF, MP; la prima delle quali s'impiega a stirar la verga, l'altra MP sollecita il mobile alla discesa.

L. Esprimetemi dunque più chiaramente, quale sarà la formula, indicante la legge di cotal movimento.

C. Sarà $MP . dt = A . du$, nella quale per A viene indicata la massa.

N. Oh Dio! Sig. Cesare. Voi siete caduto, senza avvertirlo, in un paralogismo, che avete senza dubbio altre volte notato. Ma non vedete, che la vostra formula sarebbe la stessa, che proverebbe, quando la forza fusse al corpo A immediatamente applicata.

C. Avete ragione. Fa di mestieri metter a computo la forza della leva, e discorrer così. La forza MP a quella, che in A trasportasi, deve esser in ragion reciproca delle distanze MC, AC; dunque la forza sollecitante immediatamente la massa A sarà $= MP . \frac{MC}{AC}$; dunque la vera formula sarà $\frac{MC}{AC} . MP . dt = A du$.

L. Quì ritorniamo sopra le nostre riflessioni. Ad avere la giusta legge de' tempi, non solamente è necessario surrogare in luogo della forza MF, la forza MP, come si è fatto nel caso antecedente, ma eziandio in luogo di questa la forza $MP . \frac{MC}{AC}$; benchè queste forze non entrino in guisa alcuna in azione. La ragione di questa sostituzione sapete qual' è? perchè quell'azione, che esercita realmente la forza MF, l'eserciterebbero e la forza MP applicata in M, e la forza $MP . \frac{MC}{AC}$ applicata in A, nel mentre che il pendulo si porta nella posizione infinitamente vicina *Cam*; onde non si sostituiscono se non forze equivalenti, che esercitano azioni eguali. Ma la nota legge de' tempi non si verifica se non per rapporto della forza $MP . \frac{MC}{AC}$ applicata in A immediatamente secondo la direzio-

rezione, che il mobile dee ſeguire, onde ad avere la giuſta legge de' tempi, fa di neceſſità ſoſtituire queſta in luogo dell' altre.

N. Ma la legge, che riguarda gli ſpazj, vale eſſa ſenza eccezione? Veggiamolo, e ricaviamolo dalla legge or ora ſtabilita $MP . \frac{MC}{AC} . dt = A du$; ma $dt = \frac{Aa}{u}$; dunque $MP . \frac{MC}{AC} . \frac{Aa}{u} = A du$; ovvero $MP . \frac{MC}{AC} . Aa = A u du$; ma $AC : MC :: Aa : Mm = \frac{MC}{AC} . Aa$; dunque $MP . Mm = A u du$; ma per le coſe dette più d'una volta $MP . Mm = FM . Mn$; dunque $FM . Mn = A u du$; la quale è la legge degli ſpazj.

L. Non è d'uopo, che io vi ripeta il diſcorſo poc' anzi fatto, avvertendovi, che quella deve eſſer la legge principale, la quale ſi adatta a tutte quante le forze, che entrano in azione ſenza biſogno d'alcuna ſoſtituzione, non quella, la quale, perchè abbia luogo, ha biſogno non ſol d'una, ma di due ſoſtituzioni.

C. Veramente le forze ſoſtituite, ſiccome non ſono ſe non nella mente de' geometri, non entrano in azione; ma dall'altra parte, ſe quelle non ſi ſoſtituiſcono, non ſi ha la vera legge de' tempi; e quelle ſoſtituite, ſi ha la legge de' tempi, e quella degli ſpazj.

N. La coſa dee neceſſariamente paſſar così. Perciocchè la ſoſtituzione non ſi fa ſe non di forze equivalenti, le quali eſercitano azioni eguali in tempi eguali; onde la legge degli ſpazj, intendendo ſempre di quelli, pei quali l'azion s'eſercita, deve egualmente valere. Ma per quel, che riguarda i tempi, non è vero, che la quantità del moto ſia proporzionale alla forza, ch'entra in azione, moltiplicata pel tempo, impedendolo le circoſtanze, le quali l'obbligano ad eſercitare una data azione in tempo diverſo, valendo cotal legge ſol' in quella tra le forze ſoſtituite, la quale è applicata immediatamente al mobile, e ſollecita per la direzione, che il mobile dee ſeguire. Ma in queſto appunto ſta la forza dell'argomento. Perciocchè l'azione s'eſercita da una forza, e la legge del tempo non vale ſe non in un'altra forza, che ſi ſoſtituiſce; dunque la legge del tempo non è quella dell'azioni; dunque la

legge

legge dell' azioni farà quella degli fpazj, che fempre vale.

L. Voi avete divifata la cofa con tal chiarezza, onde non penfo poffa effere in lume maggior collocata. Di quì nafcono due metodi per trattar le quiftioni meccaniche. Il primo metodo, che l'incomparabile Sig. Giovanni Bernoulli chiama indiretto, incomincia dalla legge dell' azioni, che fempre vale, alla quale applicate le circoftanze della queftione fi viene a determinar il tempo del movimento, ufando della nota legge $ds = \frac{dt}{u}$, nella quale ds fignifica lo fpazietto fcorfo dal mobile, o altra equivalente. L'altro metodo, che dallo fteffo chiamato viene diretto, e procede per via di principj ftatici, foftituifce, in luogo di quelle, che fi hanno, quelle forze equivalenti, per rapporto alle quali vale la legge nota del tempo, ed a quefta accomodando le circoftanze delle quiftioni, fi paffa a rinvenir la proporzion degli fpazj co' tempi, e colle velocità. Quefto metodo è il volgare, e comune, di cui fonofi fempre gli autori ferviti, e prima, e dopo la controverfia delle forze vive; l'altro, dopo effere ftato ufato dall' Ugenio nel centro d'ofcillazione, e nel fiffare il principio, che ferve a difcuoprire le leggi della comunicazione del movimento, è ftato poi meffo in un pieno lume dall'incomparabile Sig. Giovanni Bernoulli, e feguitato da' Signori Daniello Bernoulli, Clairaut, Maupertuis, e da altri.

C. L'Ugenio nella quiftione del centro d'ofcillazione non fervefi della legge dell'azioni, la qual' è $fds = mudu$, intendendo per ds lo fpazietto, per cui l'azione s'efercita, ma del principio, che il centro di gravità di qualunque fiftema di corpi, in qualunque maniera difcendenti, fe le velocità acquiftate prendano la direzione all' in fu, monta fempre a quell' altezza, da cui è difcefo, in qualunque maniera afcendano i corpi, ed il Bernoulli fervefi del principio della confervazion della forza viva, ficcome egli lo domanda.

L. Quefti, ed altri principj dipendono tutti dal principio più univerfale dell' azione, dal quale raccogliefi, che la medefima forza viva dee effer prodotta da una fomma d' azioni eguali, che azioni eguali producono forze vive eguali, che una determinata forza viva richiede ad effer diftrutta un' azione eguale a quella, per cui vien prodotta, che non effendovi azioni vale-

valevoli di diſtrugger la forza viva, eſſa ſi manterrà tal qual è; dalle quali conſeguenze dipende non meno il principio ugeniano, che il principio bernoulliano della conſervazion della forza viva.

N. Bramerei, che mi moſtraſte queſto più particolarmente del principio ugeniano, che il centro di gravità dee aſcendere preciſamente a quell'altezza, da cui è diſceſo, in qualunque maniera ſi faccia la diſceſa, e l'aſceſa.

L. Fatelo per voi medeſimo, giacchè avendo i principj, ſiete fornito abbaſtanza d'ingegno, ne avete d'uopo, ch' altri delle conſeguenze vi avviſi.

N. M' ingegnerò, ſiccome vi piace; ma in quello, che non saprò ſvolger per me medeſimo, non mi ſarete, ſpero io, avaro del voſtro ajuto. Sieno (*Fig.* 3) due corpi A, B, poſti in qualunque luogo, il cui centro di gravità ſia C. Diſcendano eſſi per qualunque modo, il primo in *a*, l'altro in *b*, e il centro di gravità ſi porti in *c*. Condotte le verticali AM, BN, vengano incontrate dalle orizzontali *a*M, *b*N. Sia ſimilmente la verticale CV, e l'orizzontale *c*V, la quale tagli l'altre due verticali in R, S. Fatta queſta preparazione, io rifletto, che ſupponendoſi la gravità coſtante, e proporzionale alla maſſa del corpo, di più agente verticalmente, l'intera azione della gravità ſarà $= A.AM + B.BN = \begin{matrix} A.AR + B.BS \\ A.RM - B.NS \end{matrix}$; ma eſſendo *c* il centro di gravità de' corpi ſituati in *a*, *b* ſarà $A.RM - B.NS = o$; dunque l'azione intera della gravità ſarà $= A.AR + B.BS$. Ma poichè C è il centro di gravità de' corpi in A, B, ſi avrà $A.AR + B.BS = \overline{A + B}.CV$; dunque l' intera azion della gravità $= \overline{A + B}.CV$.

Ora colle ſteſſe velocità, che i corpi ſi ritrovano avere in *a*, *b*, incominciando il movimento aſcendano il primo in 2*a*, l'altro in 2*b*, ed il centro di gravità ſi porti in K, e ſi meni la vertical KX; collo ſteſſo metodo ſi moſtrerà eſſer l'azione della gravità $= \overline{A + B}.KX$.

Dovendo poi la medeſima forza viva eſſer diſtrutta per un' azione eguale a quella, onde è ſtata prodotta, e l'azione, che ha

ha prodotta la forza viva essendo $\overline{A+B} \cdot CV$, l'azione, che l'ha distrutta $\overline{A+B} \cdot KX$, avremo senza dubbio l'egualità $\overline{A+B} \cdot CV = \overline{A+B} \cdot KX$, ovvero $CV = KX$, dunque i punti C, K, ove ritrovansi i centri di gravità nel principio, e nel fine del movimento, sono egualmente distanti dall' orizzonte: come si dovea dimostrare.

L. Senza il mio ajuto siete venuto a capo della dimostrazione. Osservate solo, che quella dimostrazione, che avete fatta in due corpi soli, si può a tre, a quattro, a mille, anzi ad infiniti accomodar egualmente.

N. De' due metodi utili a sciogliere le quistioni meccaniche, amerei, che proponeste un qualche esempio, spiegando l'uso, che ne hanno fatto gli autori.

L. Con prudenza non domandate se non un qualche esempio, perchè infinite son le quistioni, a cui sono stati applicati, e applicar si possono; onde non dovendo noi dell' intera meccanica far parola, basterà darne una chiara idea in un qualche problema, che dimostri giustissimo, e fecondissimo non meno il metodo diretto, e comune, che l'indiretto, che io soglio chiamare il metodo dell'azioni. Ma sarà bene, che d'un terzo metodo vi ragioni, di cui ha dato qualche illustre saggio il Sig. Giovanni Bernoulli.

C. Anzi lo sto aspettando con attenzione, perchè fin' ora non ho creduto, che per altra via si possa entrare ne' quesiti meccanici, se non per una di quelle due, che avete testè ricordate.

L. Quando si vuol camminare per la strada diretta, cioè colla scorta de' principj statici, che si fa egli? In luogo di quella forza, ch' entra veracemente in azione, un' altra equivalente se ne sostituisce, la quale non solamente sia applicata immediatamente alla massa, ma ancora la solleciti secondo la sua direzione; alla qual forza convien la legge de' tempi, cioè che moltiplicata per lo tempicello sia proporzionale alla quantità del moto, che si genera. Or siccome ritenendo la massa per aver la legge de' tempi, surroghiamo una forza equivalente; perchè, dico io, ritenendo la medesima forza, ch' entra in azione, non possiamo sostituire alla massa, che in real-

tà vien moſſa, un' altra maſſa moventeſi ſecondo la direzion della forza, per riſpetto a cui ſi verifichi la nota legge del tempo.

C. Il penſiero è ingegnoſo, e nuovo, ma perchè mai eſſendo naturale così, non è venuto in teſta ad alcuno?

L. Io non voglio a cotal penſiero dar quel pregio di novità, che non ha. V'ho detto ancor di ſopra, che di queſto metodo il Sig. Giovanni Bernoulli ha dati parecchi nobili ſaggi; ed io confeſſo d'aver tratto molto di lume dalle meditazioni di quell'uomo inſigne. Pure volete voi ſaper la vera cagione, perchè il metodo della ſoſtituzion delle forze ſi è ſubitamente ſcoperto, avendolo adoprato fin il Galileo, che è il primo inventor di tal ſcienza; e quello della ſoſtituzion delle maſſe è comparſo aſſai tardi, e non è ancora interamente meſſo nella ſua luce? Dalla meccanica ſtatica, che avea per le fatiche di molti ricevuta gran perfezione, ſonoſi preſi molti principj, e applicati alla meccanica del movimento. Nella ſtatica comune è la ſoſtituzione di forza a forza, ma inutile affatto la ſoſtituzione di maſſa a maſſa, non dipendendo ne molto, ne poco l'equilibrio dalla maſſa de' corpi. Perciò ſi è penſato ſubito alla ſoſtituzione di forza a forza, che era in uſo nella ſtatica, e non è caduto ne pur in mente di ſoſtituir maſſa a maſſa, di cui la ſtatica dar non poteva eſempio veruno.

C. Mi piace la rifleſſione, e mi ſembra vera; ma ad uſare di così fatto metodo, fa di meſtieri ſtabilir le leggi della ſurrogazione di maſſa a maſſa, ſiccome quelle ſi hanno, che inſegnano ſoſtituir forza a forza.

L. In così fatta ricerca incomincierò di là, dove nell'altro metodo ho dato fine, affinchè dalle coſe più facili ſi faccia paſſaggio alle più difficili; giacchè in parecchi caſi il metodo non riuſcirà così piano, ſiccome quello, in cui forza ſi ſoſtituiſce a forza. Sia (*Fig.* 4) la leva F A C mobile intorno al punto C; nel punto A ſia collocata la maſſa A, e nel punto F applicata la forza F normale alla leva: ſi domanda, qual maſſa converrà nel punto F ſoſtituire in luogo di A, acciocchè il pendulo nella ſteſſa guiſa ſi muova, come ſi muoverebbe nel caſo di A, cioè a dire, acciocchè la velocità angolare ſia la medeſima e nell'un caſo, e nell' altro. La forza motrice F, traſportata in A, ſecondo il metodo comune è =

F.

$F . \frac{FC}{AC}$; dunque la forza acceleratrice in $A = \frac{F . FC}{A . AC}$, la qual divisa per la distanza AC, darà la forza acceleratrice angolare $= \frac{F . FC}{A . AC^2}$.

Si chiami M la massa cercata da sostituirsi in F; dunque la forza acceleratrice sarà $= \frac{F}{M}$, la qual divisa per FC darà la forza acceleratrice angolare $= \frac{F}{M . FC}$. Ma per la condizion del problema, le due forze acceleratrici angolari devono esser eguali; dunque avremo $\frac{F . FC}{A . AC^2} = \frac{F}{M . FC}$; onde $M = \frac{A . AC^2}{FC^2}$; come si dovea ritrovare.

Potremo dunque in luogo della massa A surrogare la massa $\frac{A . AC^2}{FC^2}$, collocandola in F, ed otterremo lo stesso moto nel vette. Questo però unicamente interviene, quando il mobile nel suo viaggio segue una direzione paralella a quella, per cui la potenza sollecita. Ma se il mobile costretto sia a tener altra strada, il metodo si viene ad inviluppare, e a render difficile. Dobbiam però seguitarlo. A questo fine dal più facile incominciando, per poi intraprendere il più difficile, io vi propongo un problema a sciogliere. Nel piano inclinato (*Fig.* 5) PQ viaggi il mobile A, incominciando il moto da P, sollecitato da forze paralelle, ed eguali ad AC; io domando, che mi ritroviate la massa M, la quale spinta dalle medesime forze, scorra nella linea BD, paralella alle forze, gli spazj BM, BD nello stesso tempo, che il corpo A passa gli spazj PA, PQ, contenuti tra le medesime paralelle perpendicolari alle forze. Mi son io dichiarato a sufficienza?

N. Ottimamente. Ma d'onde debbo io d'un tal problema incominciare la soluzione. Prendo A*a*, infinitamente picciola, e meno *am* paralella ad AM, la quale taglia in *n* la direzion della forza AC; dal punto C meno la normale CT al piano inclinato. Ciò posto. Dovendosi scorrere gli spazj A*a*, M*m* nel medesimo tempo, saranno le velocità per A*a*, e per M*m*,

 che

che chiamerò V, u, come gli spazietti Aa, Mm, cioè $V : u :: Aa : Mm :: PQ : BD$, la qual ragione essendo costante, si concluderà, che ancor $dV : du :: PQ : BD$; ma per le leggi del Galileo $AT . dt = A . dV$, e $AC . dt = M . du$; dunque dovendo essere i tempicelli eguali, avremo $\frac{A . dV}{AT} = \frac{M . du}{AC}$; ma $AT : AC :: An = Mm : Aa$; dunque $\frac{A . dV}{Mm} = \frac{M . du}{Aa}$, ovvero $A . Aa . dV = M . Mm . du$; ma tanto $Aa : Mm$, quanto $dV : du :: PQ : BD$; dunque $A . PQ^2 = M . BD^2$, o sia $M = \frac{A . PQ^2}{BD^2}$. Eccovi dunque la massa, che animata dalle forze AC scorrerebbe lo spazio BM in quel tempo, in cui la massa A, animata dalle stesse forze, passerebbe lo spazio PA.

C. Cotal conseguenza si dedurrebbe forse con più di facilità dall'altra legge del Galileo, che riguarda gli spazj. Concossiachè si fa essere $AC . An = A . VdV$, e $AC . Mm = M . udu$; dunque, essendo $An = Mm$, sarà $AVdV = Mudu$; ma poichè Aa, Mm in egual tempo sono scorse, sarà $V : u :: Aa : Mm :: PQ : BD$, nella qual proporzione, perchè costante, sarà $dV : du$; dunque $A . PQ^2 = M . BD^2$, ovvero $M = \frac{A . PQ^2}{BD^2}$.

L. L'una, e l'altra dimostrazione è legittima. Quindi io deduco, che ad aver ancor la legge de' tempi; siccome volgarmente si sostituisce forza a forza, così si può sostituir nel caso esposto la massa $\frac{A . PQ^2}{BD^2}$ in luogo di A, ed applicarle le note leggi del Galileo, supponendo, che il movimento si faccia direttamente per la BD. Ma perfezioniamo il metodo, e passiamo agli altri casi. Quello, che abbiamo detto del piano inclinato per riguardo alle forze paralelle, devesi dire della spiral logaritmica per riguardo alle forze, che tendono al centro della spirale. Sia (*Fig 6*) la spiral logaritmica PAa, il cui centro C. Per la proprietà di cotal curva il raggio CA

fa

fa sempre il medesimo angolo colla curva Aa; onde preso l'elemento Aa, e col centro C descritto il minimo archetto an, il triangolo Aan sarà sempre di specie dato; onde la ragione di $Aa:An$ sarà data. Quindi si rinnova il discorso per voi fatto di sopra nel piano inclinato, e si trova, che la massa M, il cui moto per BC sarà isocrono al moto del corpo A per la curva PA, dovrà essere $= \frac{A \cdot Aa^2}{Mm^2}$; onde chiamando la ragione di $Aa:An::a:b$, sarà $M = \frac{A \cdot a^2}{b^2}$.

C. Ma perchè non si potrebbe dire lo stesso di tutte quante le curve, sì per riguardo alle forze paralelle, sì per riguardo a quelle, che tendono al centro; parendomi che il discorso possa senza molta difficoltà a tutte accomodarsi.

L. No sicuramente, o Signore, perciocchè, eccettuatone i due casi per noi considerati, non è vero, che la proporzione di $Aa:An$ sia costante; onde quantunque sia $V:u::Aa:An$, non sarà $dV:du::Aa:An$. Ma di quì è, che il metodo si viene ad inviluppare non poco, e che fa di mestieri di molta industria per non errare. Prendiamo però le cose forse da più alto principio, che non conviene; e perchè amo di compartir la fatica sopra di voi, così vi anderò interrogando, finchè saremo giunti al fine delle nostre speculazioni.

Quando il dottissimo Galileo prese consiglio di passare dai movimenti per le linee verticali, o inclinate ai movimenti per le linee curve, di qual metodo si valse egli?

C. Del metodo della risoluzion delle forze, risolvendo cioè la forza continuamente applicata nella perpendicolare alla curva, e nella tangenziale; e quella omettendo, siccome impiegata unicamente a premer la curva, fece uso della seconda, adattando ad essa le leggi, che avea ne' moti diretti ottenute.

L. Benissimo. Ma questo metodo è comune alle curve, e al piano inclinato; e non v'ha tra quelle, e questo verun divario per quel, che il movimento concerne?

C. Intendo: ma niun divario appunto vi fece il rinomatissimo Galileo; perciocchè siccome della velocità acquistata niuna

na parte ne perde il mobile per ragion del piano inclinato, dovendosi sol computare l'accrescimento, o la perdita della velocità prodotta dalla forza continuamente applicata; così pensa il Galileo, che la velocità una volta acquistata nella curva sempre si conservi, e rimanga la stessa, e che per averne accrescimento, o diminuimento, basti metter a computo l'azion della forza.

L. Avete per l'appunto quella corda toccata, ch' io desiderava; onde per ora lasciando da parte la forza continuamente applicata, che a suo tempo ripiglieremo, io vi domando, se un mobile, che ricevuta abbia una determinata celerità, costretto a viaggiare per una curva, intera la mantenga mai sempre, oppure a poco a poco la perda, e ne resti privo?

C. Prescindendo d' ogni resistenza d'aria, di frizione ec., credo, che la manterrebbe mai sempre.

N. Non m'allontano dalla vostra opinione; ma solo per metter in chiaro la verità, farò qualche opposizione, che v'obblighi a pensar più seriamente ad un tal suggetto. Segno due piani (*Fig.* 7) B A, A D, che facciano un angolo A determinato, e suppongo, che viaggiando il mobile A per lo piano B A sia dotato d'una determinata velocità; domando, se dopo esser passato nel piano A D, conserverà la stessa velocità, che avea prima?

C. No per certo; perchè non può il mobile passare da un piano all'altro senza percossa, nella quale consumar deve parte di quella velocità, che avea innanzi.

N. Di grazia fatemi il piacere di determinare quella parte di velocità, che ritiene, e quella, che perde.

C. Produco la B A in M, e pongo, che la A M rappresenti la velocità, che il mobile aveva nel piano B A. Dal punto M meno la M N normale al piano susseguente A D. La velocità A M devesi risolvere nelle due A N, M N. Colla M N si fa la percossa, e la A N è quella velocità, che il mobile ritiene nel piano A D.

N. E quale sarà la velocità perduta?

C. Facciamo centro in A, e coll'intervallo A M descriviamo l'arco di circolo M P. Era A M, = A P, la velocità nel primo piano B A; A N quella nel secondo piano A D; dunque nel passaggio da piano a piano si è perduta la velocità N P.

N. Que-

N. Questo è appunto il discorso, con che l'acutissimo Signor Varignon ha dimostrato, che non è immune d' errore il Galileo, quando ha supposto, che un mobile, passando da piano a piano, ritenga quella velocità, che avea prima. Or io muovo oltre il passo, e rifletto, che ciascuna curva si può considerare come un' unione d' infinitesimi piani insieme congiunti; dunque un mobile, che viaggia per una curva, passa di continuo da piano a piano, e per conseguenza va di continuo perdendo quella velocità, onde era dotato.

C. Tutto bene: ma osservate, che gli angoli B A D, onde nelle curve concorrono i piani vicini, sono infinitamente ottusi, e per conseguenza gli esterni D A M infinitamente acuti; d'onde deducesi, che la velocità perduta è infinitesima, e per conseguenza nulla, per riguardo a quella, che aveva prima.

N. Tutto bene: ma perdonatemi, la difficoltà non è sciolta. Conciossiachè comunque la velocità perduta nel passaggio da piano a piano sia infinitesima, pure dovendo il mobile, che viaggia per la curva far infiniti passaggi da piano a piano, un numero infinito di velocità infinitesime verrà a perdere; ma un numero infinito di velocità infinitesime danno una velocità finita; dunque per una finita parte di curva perderà il mobile una finita velocità, la quale non si può senza paralogismo omettere, e trascurare.

C. Non è dunque buon metodo il trascurare la perdita delle velocità, mentre il mobile, viaggiando per una curva, passa da piano a piano, quando le velocità perdute non sieno infinitesime del secondo ordine. Veggiamo se lo sono. Si produca l'arco M P finchè tagli il piano D A in Q. Essendo l'angolo M A N infinitesimo, sarà la M N infinitesima del primo ordine; ma Q N : N M :: N M : N P; Q N è finita, M N infinitesima del primo ordine; dunque N P sarà infinitesima del secondo; ma N P è la velocità perduta; dunque la velocità perduta in un passaggio da piano a piano è infinitesima del secondo ordine; dunque la somma delle velocità perdute in infiniti passaggi da piano a piano è infinitesima del primo ordine, e però incomparabile colla velocità finita.

N. Or sì che avete pienamente dimostrato, che il Galileo potea supporre, che un mobile, costretto a viaggiare per una curva, tutta la velocità mantiene, di che è dotato. Ma per qual

qual fine Sig. Lelio ci avete voi introdotti in così fatti ragionamenti?

L. Or è tempo di dichiararvelo. Se parliamo dunque di quella velocità, di che il mobile è veramente dotato, la cui direzione è sempre per la tangente della curva, cosa manifesta è, che il mobile mantiene sempre quella, che ha ne più, ne meno; poichè per ora facciam precisione da qualunque forza continuamente applicata, che la diminuisca, o l'accresca. Ma se ci porremo a considerare un altro genere di velocità, per cui il mobile si accosti, o s'allontani da un punto dato, o sia esso il centro delle forze, o qualsivoglia altro, a non errare, fa d'uopo molto diversamente discorrere, accadendo, che così fatta velocità ora ad accrescere si viene, ora a diminuire.

C. Avvertite, che siam nella supposizione, che nulla forza v'abbia continuamente applicata.

L. Ed in questa supposizione medesima, che non v'abbia forza veruna continuamente applicata, la velocità di accesso, o recesso da una linea, o da un punto dato ora è maggiore, ed ora minore. E la cosa è sì facile, e chiara, che vi maraviglierete voi stesso di non averla prima osservata. A ciò dimostrar con chiarezza, suppongo due piani qualunque CB, BE (*Fig.* 8. 9) infinitamente piccioli, che facciano l'angolo CBE infinitamente ottuso, e pongo, che nello scorrere così fatti piani, il mobile sia dotato d'una costante velocità, che chiamo V. Ora diffinir si vuole la velocità, onde il mobile s'accosta alla data linea KK nella Fig. 8, o al punto K nella 9. Nel primo caso alla linea KK si menino le normali CK, BK, EK, e le paralelle BD, EF; nel secondo caso condotte CK, BK, EK, e fatto centro in K cogli intervalli KB, KE si descrivano gli archetti BD, EF. Non v'ha dubbio, che la velocità per CB a quella, onde il mobile s'accosta al punto K, o alla linea KK, è, come CB : CD, viaggiando il mobile per CB; ma mentre scorre il piano BE, la velocità per BE alla velocità di accesso, sarà come BE, BF.

Cercar convienmi l'accrescimento della velocità di accesso in così fatto movimento. Chiamisi la velocità, colla quale viaggia il mobile per CBE, $= V$; la velocità di accesso, camminando il mobile per CB, $= u$, il suo incremento $= du$, e perciò la velocità di accesso, camminando il mobile per BE,

$= u$

$= u + du$. Dunque avremo $V : u :: CB : CD :: 1 : \frac{CD}{CB}$ $V : u + du :: BE : BF :: 1 : \frac{BF}{BE}$; dunque ex æquo $u : u + du :: \frac{CD}{CB} : \frac{BF}{BE}$, e dividendo $u : du :: \frac{CD}{CB} : \frac{BF}{BE} - \frac{CD}{CB}$; dunque $du = u . \frac{BF . CB - BE . CD}{BE . CD}$.

Supponge al preſente eſſere CB, BE due elementi di curva; ſe CB $= ds$, ſarà BE $= ds + dds$, e ſe CD $= dy$, ſarà BF $= dy + ddy$; dunque $du = u . \frac{dsdy + dsddy - dsdy - dydds}{dyds + dydds}$, e cancellati i termini, che diſtruggonſi, ed omeſſo il termine ſecondo del diviſore, che, riſpetto all' altro è infiniteſimo, ſi avrà $du = u . \frac{dsddy - dydds}{dsdy} = \frac{uddy}{dy} - \frac{udds}{ds}$. Ed eccovi trovato l' incremento della velocità di acceſſo ad una linea, o ad un punto dato.

N. Spero, che un metodo, che mi viene in mente, ſia per riuſcire molto più breve. Eſſendo $V : u :: ds : dy$, ſarà $uds = V dy$; dunque $u = \frac{V dy}{ds}$, ovvero paſſando da' numeri a' logaritmi $lu = lV + ldy - lds$, e prendendo le differenze $\frac{du}{u} = \frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}$, ovvero $du = \frac{uddy}{dy} - \frac{udds}{ds}$; la qual formula è la medeſima colla voſtra.

C. L' incremento di cotal velocità ſarà nullo, quando $\frac{ddy}{dy} = \frac{dds}{ds}$; la qual' equazione integrata da $A dy = ds$, cioè $dy : ds$ in ragion coſtante. La qual coſa non ſi verifica ſe non del piano inclinato per riguardo ad una linea, qualunque data, e della ſpiral logaritmica, per riguardo al centro della curva. Queſti ſono i due caſi, che avete di ſopra conſiderati, ed or ne veggio la ragione; perciocchè non accreſcendoſi, ne diminuendoſi la velocità di acceſſo al centro delle forze, a giuſtamente computarla non era di meſtieri, ſe non di conſiderare le variazioni prodotte della forza continuamente applicata. Ma negli altri caſi è d' uopo conſiderare, non ſol quelle variazio-

Ll ni,

ni, che voglionſi attribuire alla forza continuamente applicata, ma ancor quelle, che provengono dalla diverſa inclinazione, che le rette, condotte dalla linea, o dal punto dato, fanno colle tangenti; delle quali avete ſin or favellato. Se $\frac{ddy}{dy} > \frac{dds}{ds}$, la velocità di acceſſo ſi accreſcerà; ſi diminuirà poi ſe $\frac{ddy}{dy} < \frac{dds}{ds}$; nel qual caſo l' incremento della noſtra velocità diverrà decremento. Che ſe la velocità non ſarà d' accoſtamento, ma di diſcoſtamento tanto u, quanto du paſſerà ad eſſere negativa; onde la formula per niun modo ſi cangierà.

L. Ciò ſtabilito, chiamata la velocità d' acceſſo, onde il mobile è dotato, $= u$, e l' incremento, che naſce, per la ragion ſin ora deſcritta, in avvenire chiamato $= dc$, cominciamo a conſiderare la forza continuamente applicata. Il metodo ordinario eſigge, che così ſi cammini. Se il punto K, (*Fig.* 10) riſpetto a cui ſi conſidera la velocità di acceſſo, ſia lo ſteſſo, che il centro delle forze, da queſto punto K ſi conducano alla curva le tre infinitamente vicine KC, KB, KF. La forza venga eſpreſſa per la retta BG. Condotta la tangente BM, dal punto G le ſi meni perpendicolare GM. La forza BG ſi riſolve nelle due MG BM; la prima s' impiega a premer la curva, l' altra a produr velocità nel mobile per BE. Ma per conſiderar la velocità per BK, fa d' uopo riſolver la potenza BM nelle due BN, NM, queſta normale a BK niente opera per riguardo ad accoſtare il mobile al punto K; dunque, parlandoſi di queſta velocità, ſi dee ſoltanto metter a computo la potenza BN, il cui valore così per analiſi ritroveremo.

Deſcritti come ſopra gli archetti BD, EF, ſarà BE : BF : : BG : BM; però chiamata BG $= f$, ſarà $ds : dy : : f :$ BM $= \frac{f\,dy}{ds}$. Di più BE : BF : : BM : BN, cioè $ds : dy : : \frac{f\,dy}{ds} :$ BN $= \frac{f\,dy^2}{ds^2}$.

Chiamiſi $= dC$ l' incremento della velocità di acceſſo, che il mobile acquiſta per l' azione della potenza. Eſſendo dunque per le leggi del Galileo $\frac{BN \cdot BF}{B \cdot u} = dC$, avremo $\frac{f\,dy^3}{B \cdot u \cdot ds^2} = dC$,

dC, che è l'incremento della velocità di acceſſo, che il mobile acquiſta per l'azione della potenza.

Or aggiungendo inſieme l'uno, e l'altro incremento or ora trovato, averemo l'intero incremento della velocità di acceſſo, e però ſarà $du = dC + dc = \frac{fdy^3}{B.u.ds^2} + \frac{uddy}{dy} - \frac{udds}{ds}$.

La qual' equazione fatemi grazia di maneggiare, e di ſollevarmi dalla fatica.

N. Mi ſtudierò, quantunque ſembri in apparenza difficile. Divido per u, e traſporto i termini in così fatta maniera $\frac{du}{u} - \frac{ddy}{dy} + \frac{dds}{ds} = \frac{fdy^3}{B.u^2ds^2}$. Pongo $\frac{du}{u} - \frac{ddy}{dy} + \frac{dds}{ds} = \frac{dz}{z}$, e fatta l'integrazione ritrovo $\frac{uds}{dy} = z$, e però $u = \frac{zdy}{ds}$. Oh bello! La z altro non è ſe non ſe la velocità, con che il mobile cammina per la curva, eſſendo $u : z :: dy : ds$. Fatte le ſoſtituzioni, avremo $\frac{dz}{z} = \frac{fdy}{Bz^2}$; dunque $zdz = \frac{fdy}{B}$, e conſeguentemente $\frac{z^2}{2} = S\frac{fdy}{B}$; dunque $\frac{u^2ds^2}{dy^2} = 2S\frac{fdy}{B}$. Come ſi dovea ritrovare.

L. Si è conſiderata fin or quella velocità, con che il mobile al centro delle forze s'accoſta; collo ſteſſo metodo affatto quella ritrovaſi, onde a qualunque altro punto avvicinaſi.

N. Se volete ne farò io il calcolo; giacchè ho compreſo eſattamente il metodo, e ſpererei di riuſcirvi.

L. Non di mal animo mi ſgravo di cotal peſo per addoſſarvelo.

N. Faccio una nuova figura, (*Fig.* 11) e conſidero la velocità d'accoſtamento al punto K, riſpetto a cui faccio quella coſtruzione, che avete uſata di ſopra. La forza continuamente applicata ſia BG. Dal punto G nella tangente BM laſcio cadere la normale GM, e dal punto M ſopra la KB la normale MN, e col centro G, e coll'intervallo GE ſi deſcriva il minimo arco EH. Ciò preſuppoſto

La forza B G va riſoluta nelle due M G, B M, la prima delle quali è impiegata a premer la curva C B E, l'altra a promuovere il corpo per la tangente B M; ma perciocchè non della velocità, ſecondo la tangente, ma ſecondo la B K abbiamo a trattare, fa di meſtieri ancor riſolver la forza B M nelle due N M, B N, la prima delle quali niente promuove il mobile al punto K; dunque la ſeconda conviene ſolo metter a computo. Ritenute le denominazioni di ſopra, chiamo B H $= dx$. Eſſendo ſimili i triangoli BMG, BHE, ſi avrà BE : BH :: BG : BM, cioè $ds : dx :: f : BM = \frac{f\,dx}{ds}$. Di più per la ſimilitudine de' triangoli BMN, BFE, ſarà BE : BF :: BM : BN, cioè $ds : dy :: \frac{f\,dx}{ds} : BN = \frac{f\,dx\,dy}{ds^2}$. Dunque per le leggi del Galileo $\frac{f\,dx\,dy^2}{B.u\,ds^2} = dC$.

Aggiungendo cotal elemento all'altro per voi di ſopra trovato, avremo $dC + dc = du = \frac{f\,dx\,dy^2}{B.u\,ds^2} + \frac{u\,ddy}{dy} - \frac{u\,dds}{ds}$; la qual' equazione, per quel che veggio, maneggiaſi come l'altra. Si diſponga pertanto nella ſeguente maniera $\frac{du}{u} - \frac{ddy}{dy} + \frac{dds}{ds} = \frac{f\,dx\,dy^2}{B\,u^2\,ds^2}$; e poſto $\frac{du}{u} - \frac{ddy}{dy} + \frac{dds}{ds} = \frac{dz}{z}$, e fatta l'integrazione ſi avrà $\frac{u\,ds}{dy} = z$, la qual z ſarà la velocità, della quale è dotato il corpo ſecondo la direzione della tangente. Fatte indi le ſoſtituzioni, avremo $\frac{dz}{z} = \frac{f\,dx}{B\,z^2}$, ovvero $z\,dz = \frac{f\,dx}{B}$, e integrando $\frac{z^2}{2} = S\frac{f\,dx}{B}$, ovvero $\frac{u^2\,ds^2}{dy^2} = 2\,S\frac{f\,dx}{B}$, o ſia $u^2 = \frac{2\,dy^2}{ds^2}S\frac{f\,dx}{B}$; come ſi dovea ritrovare.

L. Fac-

L. Facciamo ora ritorno al metodo, che d'illuſtrare intrapreſo abbiamo; e veggiamo qual maſſa fa di meſtieri introdurre, quando non ſi voglia in guiſa alcuna cangiar la forza, ch'entra in azione. Poco dianzi avete trovato $\frac{fdxdy^2}{Buds^2} = dC$; ma chiamata $=$ M la maſſa, che noi cerchiamo, e non cangiata azione, ſi dovrà avere $\frac{fdx}{Mu} = dC$; dunque $\frac{fdxdy^2}{Buds^2} = \frac{fdx}{Mu}$, ovvero $M = \frac{Bds^2}{dy^2}$, cioè la maſſa B alla maſſa M, che noi cerchiamo, dovrà eſſere in ragion duplicata del coſeno dell' angolo KBE al ſeno totale. Ma avvertite, che uſando di cotal metodo, e conſiderando la maſſa M, la quale al punto K ſi accoſta, ſiccome da noi ſi paſſa dalla velocità per la curva alla velocità di accoſtamento al punto K, così fa di meſtieri, oltre quell'incremento, che naſce dall'azione della potenza, metter a computo quello, che naſce dalla diverſa inclinazione, che ha colla curva il raggio al punto dato diretto.

Quindi venendo più d'appreſſo al noſtro propoſito. Per trattare le quiſtioni meccaniche, oltre il metodo, che non cangia nè forza, nè maſſa, e che il Bernoulli chiama indiretto, ed io il metodo dell'azioni, ve ne ha due altri; il primo ſi è il comune, in cui ritenendo la maſſa, ſi cangia la forza, ſoſtituendone un'altra per la direzione, che il mobile tiene; l'altro è il preſente, in cui ritenendo la ſteſſa forza alla vera maſſa un'altra ſe ne ſoſtituiſce, che viaggia ſecondo la direzion della forza, del qual metodo abbiamo eſpoſte le leggi, e le avvertenze neceſſarie per non errare.

C. Non per opporre, ma per domandare la dichiarazione d'un dubbio, che mi ſorge in penſiero, io v'interrompo. Voi, laſciando per ora da parte il metodo dell'azioni, ove niente ſi cangia nè forza, nè maſſa, dite, che i metodi per iſciogliere le quiſtioni meccaniche ſono due; il primo è l'ordinario, nel quale conſervando la maſſa, e la ſua direzione, ſi ſoſtituiſce alla forza un'altra forza ſollecitante ſecondo la direzione del moto; il ſecondo è il voſtro, nel quale, ritenendo la forza, e la ſua direzione, ſoſtituite una novella maſſa, che viaggia ſecondo

condo la direzion della forza. E perchè nel primo metodo non si potrebbe conservar la quantità della forza, cangiando massa, e nel secondo ritener la massa, cangiando forza; e perchè e nell' uno, e nell' altro non si potrebbero cangiar amendue opportunamente, e secondo che torna in acconcio. Anzi perchè non si potrebbe considerar il movimento in una terza direzione, che non è ne della forza, ne della massa, cangiando o l'una, o l'altra, ovvero amendue. Laonde mi sembra, che non due, ma infiniti dir si debbano i metodi, con che trattar si possono le quistioni meccaniche.

L. Voi da par vostro riflettete con ingegno, e con verità, e dite cose, per le quali si vengono a render vie più robuste le conseguenze, ch' io son per dedurre al nostro proposito. Fra tanti infiniti metodi, atti a risolvere i problemi meccanici, un solo ve n'ha, in cui ne di direzione, ne di forza, ne di massa si deve far cangiamento: in tutti gli altri infiniti è necessario cangiar direzione; di più sostituire o altra forza, o altra massa. Io vi domando, quale di tutti questi debba esser quello della natura?

N. Certamente così fatte sostituzioni dalla natura non si fanno, essendo nella mente del geometra, che per le sue dimostrazioni se ne serve.

L. Qual maggior ragione v'ha, che tra gli infiniti metodi, che voi avete ottimamente divisati, piuttosto dell'uno, che dell'altro la natura si serva, riconoscendo per sue quelle leggi, che in un caso particolare hanno luogo? La ragion sufficiente dunque c'insegna, che il metodo, ch'io chiamo dell'azioni, in cui niun cangiamento si fa, è il metodo vero, e solo della natura, e che la legge, che in esso trionfa, è la legge principalissima, che contiene non men la misura dell' azione, che la proporzione tra la cagione, e l'effetto. Quale sia cotal legge l'abbiam detto, e ridetto. Considerate, vi prego, posatamente questo argomento, che ha finito di convincermi interamente, e vedrete, ch' egli ha più di forza di quel, che a prima vista apparisce.

N. Quì abbiamo una forza morta, che entrando in azione, trasfonde nella massa una certa porzione di forza viva. Se cangio massa, o direzione della velocità, cangio la forza viva transfusa; se cangio forza, e la sua direzione, cangio l'azione;

ne; dunque le cose sono interamente del pari. Certamente se io domandassi a' Signori Avversarj: nel novello metodo, in cui massa si cangia, e direzion della massa, cotal cangiamento è egli indicio sufficiente, che cotal metodo è diverso dal metodo della natura? ciascuno mi risponderebbe affermando. E perchè non lo sarà egualmente il cangiamento, che si fa nel metodo ordinario della forza, e della sua direzione. Eh che niun di cotai cangiamenti è opera della natura, ma solamente industria del geometra, che de' teoremi dimostrati opportunamente si serve per dedurne vere, e legittime conseguenze.

L. Appunto voi mi suggerite una riflessione, che in veruna maniera non debbo ommettere. Nel metodo dell' azioni ne forza, ne massa, ne direzione, ne alcuna altra cosa si cangia: onde si ha l'azione, che veramente s'esercita, eguale alla forza viva trasfusa. Nel metodo ordinario, ritenendosi la quantità, direzione, e velocità della massa, si ha quella quantità di forza viva trasfusa, che s'ottiene nel metodo dell'azioni; dunque la forza, che si sostituisce, deve esercitare la stessa azione, che esercita la forza, che si ha in natura, e però le deve essere equivalente. Nel mio metodo, in cui si ritiene la forza, e la sua direzione, si ha quell'azione, che veramente s'esercita; dunque la massa deve ricevere il medesimo accrescimento di forza viva, che riceve la massa, che si ha in natura, e però la massa, che si sostituisce, si potrà chiamare equivalente a quella, che si ha in natura. Negli altri metodi, cangiandosi e qualche cosa spettante alla forza, e qualche cosa spettante alla massa, ne l'azione, ne la forza viva trasfusa è la stessa con quella, che si ha in natura: e perciò si sostituiscono nuove azioni, e nuove forze vive, tali però, da cui è lecito dedurre i sintomi del movimento, che abbiamo. E da ciò comprenderete la cagione, perchè abbia fatta menzione particolare del metodo, in cui ritenendo la forza colla sua direzione, cangio la massa, e la sua direzione.

N. A cotal vostro ragionamento io non m'accheto; perocchè una non leggera dubitazione mi sorge nell'animo. Voi dite, che nel vostro metodo, non cangiandosi azione, la massa sostituita viene a ricevere il medesimo accrescimento di forza viva, che riceve la massa, che si ha in natura. Ma non avete voi insegnato con ragioni dimostrative, ch'oltre alla velocita,

che

che alla massa sostituita s'accresce per vigore dell'azione della potenza, una parte ancor se ne aggiunge per la diversa inclinazione, onde la retta, proveniente dal centro delle forze, s'inclina alla curva; perlocchè nella massa sostituita si viene a rifondere più di velocità, che non porta l'azione della potenza? dunque ancor maggior quantità di forza viva.

L. Io per me credo, che il vostro raziocinio in tutto, e per tutto sia giusto, eccettuatane l'ultima conseguenza. E per farvelo pienamente comprendere, supponete un corpo viaggiante per una curva con una costante velocità: voi converrete meco di leggieri, che così fatto corpo è d'una costante forza viva dotato. Se passiamo da quella velocità, onde il mobile per la curva è veramente dotato, alla velocità di accostamento ad un punto dato, questa si è dimostrata variabile. In cotai variazioni non ha parte veruna l'azione di qualsivoglia potenza, ma deriva dalle diverse inclinazioni, onde le linee, provenienti dal punto dato, incontrano la curva; ma niuna forza viva può nascere nel corpo senza azion di potenza; dunque cotai variazioni di velocità non sono vero indicio di forza viva accresciuta, o diminuita nel corpo.

Nel caso nostro, poichè cangiamo la direzion della velocità, trasportandola dalla curva ad una linea retta data di posizione, ovvero passando dalla vera velocità alla velocità d'accostamento ad un punto dato, due generi d'incremento di velocità fa d'uopo considerare; il primo nasce dalla diversa inclinazione della linea proveniente dal punto dato colla curva, il secondo dalla vera azione della potenza. Il primo non indica nella massa sostituita verun accrescimento di forza viva; e solo al secondo fa d'uopo por mente, per istabilire il giusto accrescimento di forza viva nel corpo introdotto, il quale però, secondo i simboli posti di sopra, verrà ad essere $\frac{B\,dt^2}{dy^2}\,u\,dC$; ma $dC = du - dc$, e però $dC = du - \frac{u\,ddy}{dy} + \frac{u\,ddt}{dt} = u\,D\,l\,\frac{u\,dt}{dy} = \frac{u\,D\frac{u\,dt}{dy}}{\frac{u\,dt}{dy}}$; il qual valore però, sostituito nella formula antecedente, avremo l'espressione dell'incremento della forza

viva

viva così $\frac{Bds^2}{dy^2} \cdot \frac{u^2 D \frac{uds}{dy}}{\frac{uds}{dy}} = \frac{Buds}{dy} D \frac{uds}{dy}$, la qual'integrata, darà l'intera forza viva $= \frac{Bu^2 ds^2}{2dy^2}$; ma la massa sostituita $M = \frac{Bds^2}{dy^2}$; dunque la forza viva $= \frac{Mu^2}{2}$, cioè la forza viva, esistente nella massa M, eguale alla metà del prodotto della massa nel quadrato della sua velocità. Di più questa forza viva è eguale alla forza viva del corpo B; perchè $\frac{uds}{dy}$ è la velocità, con che il mobile viaggia per la curva.

N. O inaspettatissime conseguenze!

C. Qual cosa fate?

N. Osservo se v'abbia sbaglio nel calcolo, perchè parmi di travedere, e che debba esser impossibile ciò, che pur veggio, e tocco con mano.. Il calcolo va benissimo. Ma come può essere, che la massa acquisti due incrementi di velocità, uno accrescente la forza viva, l'altro no; e che non ostante l'intera forza viva, di che è dotata, sia proporzionale alla massa nella metà del quadrato dell'attuale sua velocità. Queste due cose mi sembrano così opposite, come l'inverno, e la state; onde appena posso crederlo, quantunque il calcolo, che errar non suol, me lo dica.

L. Convien, che vi discuopra il mistero, che per altro non è recondito. Supponete, che per noi s'abbia la forza viva $\frac{Mu^2}{2}$; dunque differenziando, avremo per l'elemento della forza viva $Mudu + \frac{u^2}{2} dM$. Se sia $\frac{u^2}{2} \cdot dM = - Mudc$, l'elemento della forza viva sarà $= Mudu - Mudc$; ma $du - dc = dC$; dunque $MudC$ sarà l'elemento della forza viva, eguale all'azione della potenza. Fa d'uopo ora determinar la massa M, affinchè sia $\frac{u^2}{2} dM = - Mudc$; dunque $\frac{dM}{M} = \frac{-2dc}{u} = \frac{-2ddy}{dy} + \frac{2dds}{ds}$, e integrando $lM - lB = -$

$2ldy + 2lds$; ovvero $\frac{M}{B} = \frac{ds^2}{dy^2}$; dunque $M = \frac{Bds^2}{dy^2}$, che è la formula della maſſa da ſoſtituirſi, ritrovata di ſopra. Ora dovreſte interamente penetrar il miſtero. Concioſſiachè l'azione della potenza produce l'elemento della forza viva $= MudC$ $= Mudu - Mudc$; ma $- Mudc = \frac{u^2}{2} dM$; dunque l'elemento della forza viva $= Mudu + \frac{u^2}{2} dM$, che integrato da $\frac{Mu^2}{2}$ per l'intera forza viva, di che la maſſa è dotata.

N. Comprendo preſentemente ogni coſa, e veggio, che ſi dee la maſſa M dire equivalente alla maſſa B, non ſolamente per ciò, che in egual tempo compiono gli ſpazj corriſpondenti, ma ancor per ciò, che ſono della ſteſſa forza dotate, la quale è proporzionale alla maſſa nella metà del quadrato della velocità moltiplicata. Concioſſiachè quantunque l'azione della potenza non produca altra forza viva ſe non ſe $MudC = Mudu - Mudc$; pure coll'opportuna diminuzion della maſſa, e col levare parte di quella forza viva, ch'era ſtata prodotta prima, ſi ottiene, che $MudC = D\frac{Mu^2}{2}$. Per le quali coſe veggio eſſer vero ciò, che avete detto teſtè, che non cangiandoſi in queſto metodo ne la forza, ne la ſua direzione, ſi ha la ſteſſa azione della natura, e però la medeſima forza viva, che ſi ha in natura.

C. Così fatte rifleſſioni mi piacciono aſſai; ma ritorniamo per poco alle leve. Siccome il metodo ordinario traſporta la forza, ove è la maſſa, ſoſtituendone l'equivalente; ſiccome il voſtro metodo traſporta la maſſa, ove è la forza, ſoſtituendone un'altra, che poſſiamo equivalente chiamare; così la forza, e la maſſa ſi può portare in un terzo luogo, ſoſtituendo in luogo dell'una, e dell'altra, quella, che è congrua.

L. Così è, e del metodo di ſoſtituire la maſſa, ove è la forza, ſi è ſervito in più ricerche, nell'opere, che novellamente ſono ſtate ſtampate in Genevra, il Sig. Giovanni Bernoulli; di quello di traſportar e maſſa, e forza in un terzo luo-

luogo, si è servito lo stesso autore nel determinar il centro d'oscillazione. Le quali scoperte m'hanno dato occasione di fare le riflessioni, ch'ora vi ho esposte.

N. Egli è stato sempre un gran pregiudicio nella mente degli uomini il pensare, che il primo, ed il più visibile metodo, atto a discuoprire una qualche verità, quello sia, che contenga il real metodo d'operare della natura. Io per me tengo presentemente per fermo, che, se a trattar le ricerche meccaniche, il primo metodo usato fosse stato quel dell'azioni, o non sarebbe insorta, o in breve sarebbesi dissipata la presente quistione; nè sarebbe stato necessario, che per discuterla avessimo impiegate tante giornate; e di qua, cred'io, che nasca, che parecchi filosofi, i quali solo superficialmente hanno alla quistione pensato, nè ben addentro penetrato negli ultimi suoi recessi, avendo la mente assuefatta alla sostituzion delle forze, volentieri abbracciano la volgare, e comune opinione.

C. Così senza dubbio dee essere; perchè riandando ora i miei pensieri passati, m'avvedo a me essere similmente avvenuto; perciocchè osservando, che la formula de' tempi era universale per tutti i casi, a lei, siccome in apparenza più semplice, mi sono abbandonato, giudicandola principale, e contenente la proporzione tra la cagione, e l'effetto. Quindi è stato ottimo consiglio il vostro di liberarci fin dal principio d'un tal pregiudicio, mettendo gli animi nostri in una totale scientifica indifferenza. Ma io stimerei bene, poichè ci rimane ancora molto di tempo, che voi trattaste alcun problema meccanico, secondo il metodo dell'azioni; la qual cosa spero, che riuscirà grata anche al Sig. Nestore.

N. Gratissima: anzi io pur vi prego di farlo, perchè ciò verrà a dar maggior luce alle cose, che fin ora ci avete dichiarate.

L. Se io volessi esporre tutti i problemi, che per questo metodo sono stati sciolti, principalmente dall'incomparabile Sig. Giovanni Bernoulli, entrerei in un affare lunghissimo, e forse inutile; perciocchè già tutti i geometri in questo punto convengono, che il metodo è giustissimo. Contuttociò sarebbe rusticità il non condiscendere a domande così gentili. Incomincierò, se vi piace, dal centro d'oscillazione; quistione, che ha travagliato cotanto i più famosi geometri, come sapete.

 Nel

Nel vette mobile (*Fig.* 12) intorno al punto C fieno collocate due maffe ne' punti A, B, e ne' punti F, G fieno applicate le forze F, G normali al vette. Si concepifca imprimerfi al vette un infinitefimo movimento, e paffar nella fituazione infinitamente proffima Cgf. Si chiami la velocità del corpo $A = dV$, quella del corpo $B = du$. Seguendo il metodo dell'azione, avremo $F.Ff + G.Gg = \frac{A\,dV^2}{2} + \frac{B\,du^2}{2}$; ma $CF:CG::Ff:Gg = \frac{CG.Ff}{CF}$. Di più $CA:CB::dV:du = \frac{CB.dV}{CA}$; dunque avremo $F.Ff + \frac{G.CG.Ff}{CF} = \frac{A\,dV^2}{2} + \frac{B.CB^2.dV^2}{2.CA^2}$; dunque $\frac{Ff}{CF}.\overline{F.CF + G.CG} = \frac{dV^2}{2.CA^2}.\overline{A.CA^2 + B.CB^2}$; ovvero $\frac{Ff}{CF}.\frac{F.CF + G.CG}{A.CA^2 + B.CB^2} = \frac{dV^2}{2.CA^2}$. Si avverta, che $\frac{dV}{CA}$ è la velocità angolare del vette.

Or concepiamo un vette femplice KH ifocrono al compofito, ed a cui nello fteffo punto fia applicata la maffa E, e la forza H; fi cerca la lunghezza KH. Suppongafi, che anche quefto pendulo paffi nella fituazione infinitamente vicina Kh, in modo che l'angolo K fia eguale all'angolo C. Seguendo il metodo dell'azioni, avremo $H.Hh = \frac{E.dw^2}{2}$; chiamando dw la velocità del corpo E; e dividendo per $E.KH^2$, farà $\frac{H.Hh}{E.KH^2} = \frac{dw^2}{2.KH^2}$; ma $\frac{dw}{KH}$ è la velocità angolare, che deve effer eguale alla velocità angolare del pendulo CF; dunque $\frac{Ff}{CF}.\frac{F.CF + G.CG}{A.CA^2 + B.CB^2} = \frac{H.Hh}{E.KH^2}$; ma $Ff:Hh::CF:KH$; dunque $\frac{Ff}{CF} = \frac{Hh}{KH}$, e però fatta l'opportuna divifione $\frac{F.CF + G.CG}{A.CA^2 + B.CB^2} = \frac{H}{E.KH}$, e per confeguenza $KH = \frac{H}{E}$.

A.

$\frac{A . CA^2 + B . CB^2}{F . CF + G . CG}$; la qual formula, ſe A, B coincidano co' punti F, G, e le forze ſieno, come le maſſe, ſarà quella ſteſſa, che ha ritrovata il celebre Ugenio nel ſuo orologio oſcillatorio.

C. La ſoluzione è ſempliciſſima, ed elegante, e più univerſale dell' Ugeniana; ma ſembrami per altra parte molto riſtretta; perciocchè non vale ſe non ne' movimenti minimi, ed iniziali, ed allorchè le potenze ſono normali al vette.

L. A cotai mali ci ſtudieremo di rimediare. Ed in prima io dico, che la ſteſſa formula ha luogo, anche quando le forze non ſieno normali al vette, purchè ſieno paralelle tra loro. Concioſſiachè ſia il vette CF, (*Fig.* 13) come ſopra, a cui ſieno applicate due potenze paralelle FR, GS. Si faccia, come ſopra, un infiniteſimo movimento, e paſſi il pendulo nel ſito Cqp; le potenze ſi porranno ne' ſiti Rp, Sq; dunque co' centri R, S, deſcritti gli archi circolari pf, qg, le azioni faranno F . Ff + G . Gg, eguali però a $\frac{A . dV^2}{2} + \frac{B du^2}{2}$. Ma non meno gli archi Fp, Gq, che le rette Ff, Gg ſono come CF : CG; dunque rinovando il raziocinio, ſi ritroverà la medeſima formula della lunghezza del pendulo ſemplice KH, col quale dovrà la forza ET fare lo ſteſſo angolo THK, che le FR, GS fanno col pendulo CF.

C. Al primo male avete poſto rimedio; ma l'altro non è ſanato, cioè che il moto è ſempre minimo, ed iniziale.

L. Poſte tutte le coſe, come ſopra, abbiano i due penduli CF, KE le medeſime celerità angolari, dico, che accciocchè le velocità angolari, novellamente prodotte, nel muoverſi de' penduli per lo ſteſſo angolo, ſieno eguali, dovrà eſſer la lunghezza KE della ſteſſa miſura, che è ſtata determinata di ſopra. Il calcolo è affatto lo ſteſſo, onde non è d'uopo ripeterlo; ma ſe pur il volete, lo rinoverò di buon animo.

C. Farete grazia, perchè a noi, i quali non ci abbiam penſato quanto voi, le coſe non ſono così preſenti.

L. Eccovelo. Pel metodo dell' azioni ſi ha F . Ff + G . Gg = AVdV + Budu; ma V : u : : dV : du : : AC : BC. Di più Ff : Gg : : CF : CG. Quindi fatte le ſoſtituzioni, e le oppor-

portune operazioni, avremo $\frac{Ff}{FC} \cdot \frac{\overline{F.FC + G.GC}.AC}{dV.\overline{A.AC^2 + B.BC^2}} = \frac{V}{AC}$. Nell' altro pendulo ritroveremo $H.Hb = Ewdw$; dunque $\frac{H.Hb}{E.KH.dW} = \frac{W}{KH}$; ma le due velocità angolari, le quali s'eſprimono per $\frac{V}{AC}$, $\frac{W}{KH}$, devono eſſer eguali; dunque $\frac{Ff}{FC} \cdot \frac{\overline{F.FC + G.GC}.AC}{dV.\overline{A.AC^2 + B.BC^2}} = \frac{H.Hb}{E.KH.dW}$; ma eſſendo eguali agli angoli C, K, ſarà $\frac{Ff}{FC} = \frac{Hb}{KH}$; dunque $\frac{\overline{F.FC + G.GC}.AC}{dV.\overline{A.AC^2 + B.BC^2}} = \frac{H}{E.dW}$, ovvero $\frac{dV}{AC} \cdot \frac{A.AC^2 + B.BC^2}{F.FC + G.GC} = \frac{dW}{KH} \cdot \frac{E.KH}{H}$; dunque perchè gl'incrementi delle velocità angolari ſieno eguali, cioè perchè $\frac{dV}{AC} = \frac{dW}{KH}$, ſarà $\frac{A.AC^2 + B.BC^2}{F.FC + G.GC} = \frac{E.KH}{H}$; dalla quale ſi ritrova la ſteſſa KH, che abbiam ritrovato di ſopra.

Ciò provato, facilmente dimoſtraſi, che quando le forze F, G, H ſi conſervino ſempre paralelle tra loro, i due penduli CF, KH ſaranno ſempre mai iſocroni. Perciocchè le prime velocità angolari nell' uno, e nell' altro prodotte ſaranno eguali; ma poſte queſte eguali, le novellamente prodotte, ſono eguali, e così ſempre eguali; dunque in ogni luogo le velocità angolari ſi troveranno eguali, e per conſeguenza i penduli iſocroni.

C. Non ſono ancora interamente pago, quantunque vi ſembri, che debba eſſerlo; perciocchè il problema del centro d'oſcillazione non è ſciolto ſe non nel caſo, che le forze, e le maſſe ſieno in una linea retta coſtituite; ma quando ſono fuori di linea retta, ed ancor fuori d'uno ſteſſo piano, il problema, come voi vedete meglio di me, reſta ancora da ſcioglierſi.

L. Avete ragione, e queſto caſo particolare rieſce più dell' altro ſcabroſo. Al pendulo, che ſi rivolve intorno al punto C (*Fig.* 14) ſieno unite le maſſe A, B, ed applicate le forze F, G, alle cui direzioni ſi menino le normali CL, CM; e fatto

fatto, come sopra, il moto minimo, ad esse si menino paralelle le rette pf, qg. Pel metodo dell' azioni si avrà $F.Ff + G.Gg = \frac{A dV^2}{2} + \frac{B du^2}{2}$, e sostituito in luogo di du il suo valore $= \frac{dV.CB}{AC}$, si troverà $F.Ff + G.Gg = \frac{dV^2}{2AC^2}.\overline{A.AC^2 + B.BC^2}$; ma $Ff.Gg$ in ragion composita

di $Ff : Fp :: CL : CF$
$Fp : Gq :: CF : CG$
$Gq : Gg :: CG : CM$;

dunque $Ff : Gg :: CL : CM$; dunque sostituito il valor di CG, si avrà $\frac{Ff}{CL}.\frac{F.CL + G.CM}{A.AC^2 + B.BC^2} = \frac{dV^2}{2.AC^2}$.

Si prenda l'altro pendulo KH, e alla direzione della forza H si meni la normale KN, e a questa la paralella ob. Pel metodo dell' azioni sarà $H.Hb = \frac{E.dw^2}{2}$; ma $Ff : Hb$

in ragion composita di $Ff : Fp :: CL : CF$
$Fp : Ho :: CF : KH$
$Ho : Hb :: KH : KN$;

dunque $Ff : Hb :: CL : KN$. Di più $dV : dw :: CA : KH$; dunque $\frac{H.Ff.KN}{CL} = \frac{E.dV^2.KH^2}{2.CA^2}$; ovvero $\frac{H}{E}.\frac{Ff.KN}{CL.KH^2} = \frac{dV^2}{2.CA^2}$.

Quindi avremo l'equazione $\frac{Ff}{CL}.\frac{F.CL + G.CM}{A.AC^2 + B.BC^2} = \frac{H.Ff.KN}{E.CL.KH^2}$; la quale espurgata da $\frac{F.CL + G.CM}{A.AC^2 + B.BC^2} = \frac{H.KN}{E.KH^2}$.

A così fatta formula arrivati, noi veggiamo non poter esser costante la lunghezza KH del pendulo isocrono, quando la proporzione di $\overline{F.CL + G.CM} : H.KN$ non sia costante.

A stabilire, quando ciò avvenga, nell' ipotesi della gravità dotata di direzioni paralelle, come la posizione del pendulo isocrono, niente dipende dalle masse, perchè nell' accennata pro-

proporzione non entrano, considereremo solo le forze F, G, (*Fig.* 15) applicate ai bracci CF, CG. Sia CN orizzontale, nella quale cadano le normali FL, GM. La posizione del pendulo isocrono, rispetto alle CF, CG, sia CH; D sia il centro delle forze F, G, e HN, DP sieno perpendicolari all' orizzontale. La posizione del pendulo CH vien ad esser determinata dalla proporzione di $\overline{F.CL + G.CM} : H.CN$, che deve esser costante; ma per la proprietà del centro delle forze $F.CL + G.CM = \overline{F+G}.CP$; dunque dovrà esser costante la proporzione $\overline{F+G}.CP : H.CN$; ma la proporzione di $\overline{F+G} : H$ è costante; dunque dee esser costante la proporzione di $CP : CN$. Si produca PD in V, sarà $CN : CP :: CH : CV$; ma CH è costante; dunque deve esser costante CV; ma questo non può verificarsi, se il punto D non cada in V; dunque il pendulo CH deve pel centro delle forze passare.

Supponendo per tanto, ch' egli vi passi, e che i punti D, V sieno lo stesso, veggiamo quale debba esser la lunghezza CH.

Fatta la sostituzion opportuna, si ha $\frac{\overline{F+G}.CP}{A.AC^2 + B.BC^2} = \frac{H.CN}{E.CH^2}$;

ma $CP : CN :: CD : CH$; dunque $\frac{\overline{F+G}.CD}{A.AC^2 + B.BC^2} = \frac{H.CH}{E.CH^2}$

$= \frac{H}{E.CH}$; dunque $CH = \frac{H}{E} . \frac{A.AC^2 + B.BC^2}{\overline{F+G}.CD}$.

Ecco ritrovata la lunghezza, e posizione del pendulo isocrono, qualunque sia la posizione del pendulo composito per rapporto all' orizzonte; e ciò nel moto iniziale, ma voi vedete, che ripetendo i discorsi, che abbiamo fatti di sopra, si prova agevolmente, che sempremai il nominato pendulo semplice sarà isocrono col composito. E per non andar più a lungo, osservate, siccome il metodo vale anche, quando le masse, e le forze non sono poste nello stesso piano; dovendosi però allora computare non le distanze da un punto, che sia centro del movimento, ma da una linea, che ne sia l' asse, siccome è notissimo.

C. Questa nuova dimostrazione del pendulo composito m' è piac-

piacciuta assai, e stante la vostra idea dell'azioni, essa è dedotta da' suoi immediati principj. Ma per discuoprir pienamente la fecondità del metodo dell'azioni, bramerei d'ascoltare per mezzo d'un cotal metodo la soluzione d'un qualche altro problema.

L. Proponetene alcuno, e vedrò di far buon uso del metodo.

N. Voglio io proporne uno, che si potrà ancora rendere più composito.

Sieno due corpi A, B uniti con una corda indistraibile ACB, (*Fig.* 16) che passa per una carrucola posta in C. Il primo sia animato dalla gravità $= G$ costante, o variabile a piacimento; l'altro sia dotato della sola forza d'inerzia: il primo descriva quella linea retta, per la quale la forza sollecita; l'altro sia costretto a descrivere una determinata curva HB: si domanda la velocità dell'uno, e dell'altro, discendendo da' punti di quiete K, H.

L. Sieno giunti i corpi in A, B; e la velocità del primo si chiami $= V$, del secondo $= u$. Si porti il primo in a, il secondo in b, viaggiando per gl'infinitesimi spazj Aa, Bb; e fatto centro in C, si descriva l'archetto be. Essendo la corda indistraibile, è manifesto, che $Aa = Be$. Pel metodo dell'azioni, si avrà $G . Aa = A . VdV + Budu$; dunque integrando $\int G . Aa = \frac{AV^2}{2} + \frac{Bu^2}{2}$. La sommatoria si dee prendere in guisa, che a' punti K, H le velocità $V, u = o$. Ma $V : u :: Aa : Bb$; dunque $u = \frac{V . Bb}{Aa}$, e fatta la sostituzione, si avrà $\int G . Aa = \frac{AV^2}{2} + \frac{B . V^2 . \overline{Bb}^2}{2 . \overline{Aa}^2}$, ovvero $\frac{2 . \overline{Aa}^2}{A \overline{Aa}^2 + B . \overline{Bb}^2}$. $\int G . Aa = V^2$; ma per la natura della curva è data la Bb per $Be = Aa$; dunque si è ritrovata la velocità del corpo A. Similmente trovasi quella del corpo B; dunque ec.

C. Semplicissima soluzione; ma col metodo diretto, e ordinario si potrà ritrovar egualmente?

L. Non ve n'ha dubbio, mettendo a computo la tenacità della corda, che chiameremo $= T$. La tenacità contrasta, e

s'oppone alla forza G, onde $G - T$ ſarà la forza, da cui viene ſollicitato il corpo A. La ſola tenacità della corda viene ad eſſer applicata al corpo B; ma eſſendo queſto coſtretto a viaggiar per la curva, ſarà di meſtieri ritrovar la forza tangenziale, la quale ſarà alla tenacità $T :: Be = Aa : Bb$; dunque la forza tangenziale, onde il mobile B viene ſollecitato, è $= \frac{T \cdot Aa}{Bb}$. Quindi avremo le note formule $\overline{G - T} \cdot dt = A dV$, $\frac{T \cdot Aa}{Bb} \cdot dt = B du$, intendendo per dt il tempicello; ma $dt = \frac{Aa}{V} = \frac{Bb}{u}$; dunque $\frac{\overline{G - T} \cdot Aa}{V} = A . dV$, $\frac{T \cdot Aa}{u} = B du$; dunque $G . Aa - AV dV = T . Aa$, $T . Aa = B u du$; e però $G . Aa - AV dV = B u du$, che è la formula adoprata di ſopra.

Il preſente metodo ha queſto vantaggio, che ſi può per eſſo rinvenire la tenacità T. Perocchè ſi ha $T = G - \frac{AV dV}{Aa}$; ma differenziando il valor di VV, che nella ſoluzione ſi è ritrovato, ſi trova $V dV = D \frac{\overline{Aa}^2}{A . \overline{Aa}^2 + B . \overline{Bb}^2} \cdot \int G . Aa$; dunque $T = G - \frac{A}{Aa} D \frac{\overline{Aa}^2}{A . \overline{Aa}^2 + B . \overline{Bb}^2} . \int G . Aa$; come ſi dovea ritrovare.

C. E l'uno, e l'altro metodo ſembrami elegante; ma come dite, che il problema ſi può rendere più compoſito?

N. Si può conſiderare animato anche il corpo B dalla ſua forza particolare; ſi può obbligare anche il corpo A a deſcrivere non una retta, ma una curva; e così il problema verrà ad eſſere più compoſito.

L. Via prendiamolo nel ſenſo più compoſto, e ſtudiamoci di darne una ſoluzione compiuta. Da' punti di quiete H, K (*Fig.* 17) diſcendano i corpi B, A, il primo animato dalla forza $= F$, che è diretta al centro D; l'altro dalla forza $= G$, che è diretta al centro E; i quai corpi ſieno congiunti inſieme

ſieme con una corda, che diſtenſion non ammette, e che ſi piega ſempre al punto C. Il corpo B ſia obbligato a viaggiare per la curva HBC, l'altro per la curva CKA. Sieno giunti i corpi ne' punti B, A, e ſi promuovano ne' punti infinitamente vicini b, a. E' chiaro, che deſcritti col centro C gli archetti be, Al, ſarà $Be = al$; e queſta è la condizione, con che ſi devono prendere gli elementi delle curve Bb, Aa. Menate le DB, Db, e deſcritto col centro D l'arco Bn; ſimilmente menate le EA, Ea, e col centro E deſcritto l'arco am, le azioni delle forze verranno ad eſſere $G.Am$, $F.bn$; delle quali, ſe amendue i corpi a' centri loro s'accoſtano, ſi dovrà prender la ſomma; ma ſe uno avvicinandoſi, l'altro ſe ne diſcoſta, ſe ne dovrà prender la differenza; e perchè nella figura il corpo B dal centro D allontanaſi, ne prenderemo la differenza. Ciò poſto, per metodo dell'azioni, ſi avrà $G.Am - F.bn = AVdV + Budu$; e integrando $\int G.Am - \int F.bn = \frac{AV^2}{2} + \frac{Bu^2}{2}$; ma $V.u :: Aa : Bb$; dunque $u = \frac{V.Bb}{Aa}$; e però $\int G.Am - \int F.bn = \frac{AV^2}{2} + \frac{B.V^2.\overline{Bb}^2}{2.\overline{Aa}^2}$, ovvero $\frac{2\,Aa^2.\overline{\int G.Am - \int F.bn}}{A.\overline{Aa}^2 + B.\overline{Bb}^2} = V^2$; come ſi dovea ritrovare, e collo ſteſſo metodo ſi ritroverà la velocità del corpo B.

C. Veracemente in un problema così compoſito non mi ſarei aſpettato giammai una ſoluzion così ſemplice. Di grazia applicate al problema ancor l'altro metodo, che m'immagino non potrà riuſcire sì ſemplice.

L. Non può negarſi, che più lungo alquanto non rieſca, eſſendo neceſſario determinar prima le forze tangenziali. E' noto, che ſarà $Aa : Am :: G$ alla forza tangenziale $= \frac{G.Am}{Aa}$. Similmente $Bb : bn :: F$ alla forza tangenziale $= \frac{F.bn}{Bb}$. Di più $Aa : al :: T : \frac{T.al}{Aa} =$ alla forza tangenziale, derivata dalla tenacità della corda applicata al corpo A. Finalmente $Bb : Be :: T : \frac{T.Be}{Bb} =$ alla forza tangenziale, derivata dalla ſteſſa

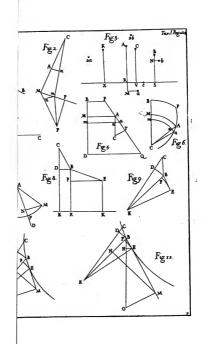
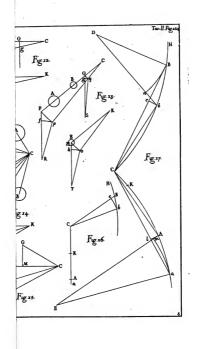
tenacità della corda applicata al corpo B. Quindi chiamato il tempicello $= dt$, avremo per le leggi del Galileo le note formule $\overline{\frac{G \cdot Am}{Aa} - \frac{T \cdot al}{Aa}} \cdot dt = AdV$, e $\overline{\frac{T \cdot Be}{Bb} - \frac{F \cdot bn}{Bb}} \cdot dt = Bdu$; ma $dt = \frac{Aa}{V} = \frac{Bb}{u}$; dunque $\frac{G \cdot Am - T \cdot al}{V} = AdV$, e $\frac{T \cdot Be - F \cdot bn}{u} = Bdu$; e prendendo gl' integrali, dopo aver moltiplicato reſpettivamente per V, u, ſi avrà $\int G \cdot Am - \int T \cdot al = \frac{A \cdot V^2}{2}$, e $\int T \cdot Be - \int F \cdot bn = \frac{B \cdot u^2}{2}$; ovvero $\int G \cdot Am - \frac{AV^2}{2} = \int T \cdot al$, e $\int T \cdot Be = \int F \cdot bn + \frac{Bu^2}{2}$; dunque eſſendo per le condizioni del problema $al = Be$, avremo $\int G \cdot Am - \frac{A \cdot V^2}{2} = \int F \cdot bn + \frac{Bu^2}{2}$; ovvero $\int G \cdot Am - \int F \cdot bn = \frac{AV^2}{2} + \frac{Bu^2}{2}$, che è la ſteſſa formula ſomminiſtrata prima dal metodo dell' azioni.

Così fatto metodo ci dà in mano la miſura della tenacità della corda. Perciocchè abbiamo $\int G \cdot Am - \frac{AV^2}{2} = \int T \cdot al$; e ſurrogando il valor della V^2 dianzi trovato, ſi avrà $\int G \cdot Am - \frac{A \cdot Aa^2 \cdot \overline{\int G \cdot Am - \int F \cdot bn}}{A \cdot \overline{Aa}^2 + B \cdot \overline{Bb}^2} = \int T \cdot al$, e differenziando $G \cdot Am - D \frac{A \cdot Aa^2 \cdot \overline{\int G \cdot Am - \int F \cdot bn}}{A \cdot \overline{Aa}^2 + B \cdot \overline{Bb}^2} = T \cdot al$, e dividendo per al, $\frac{G \cdot Am}{al} - \frac{1}{al} D \frac{A \cdot Aa^2 \cdot \overline{\int G \cdot Am - \int F \cdot bn}}{A \cdot \overline{Aa}^2 + B \cdot \overline{Bb}^2} = T$; come ſi dovea ritrovare.

N. Ci ſiamo oggi trattenuti nell' auſterità della metafiſica, e matematica, che m' hanno coll' applicazione non poco ſtancato il capo; onde per ſollevarlo, ſarà bene, che a' penſieri di divertimento, e di novelle lo rivolgiamo.

GIOR-

Tav. I Pag. 224
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 11.

Tav. II. Pag. 284
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
8

GIORNATA NONA.

INTERLOCUTORI.

Lelio, Nestore, Cesare.

L. DOpo le prove, siccome a me ne pare, convincentissime, che nelle due passate giornate vi ho esposte distesamente, potrei in parte dispensarmi dalla cautela, usata sin ora di prescindere, in quale delle due formule, se in quella de' tempi, ovver degli spazj, sia la misura dell'azion contenuta. Perciocchè avendo io dimostrato, che la legge degli spazj è la principale, e quella, che esprime l'azione, e la proporzione tra la cagione, e l'effetto, e che la legge de' tempi è solamente accessoria, e appartenente ad una qualche circostanza variabile, mi servirei del jus, che la mia dimostrazione mi porge, se in avvenir supponessi esser l'azione in ragion composita delle potenze, e degli spazietti, e riguardassi tutte le ragioni proposte da' Cartesiani come difficoltà, che non son valevoli di abbattere una fondata dimostrazione, ma che supposta la verità dimostrata, domandan rischiaramento.

Nonostante ho in pensiero di non servirmi d'un tal diritto, quantunque il potessi; anzi in considerando quegli argomenti, che l'una parte, e l'altra deriva dalle leggi della comunicazione del movimento, m'accingo ad esaminare, quali sieno di maggior nerbo, e robustezza forniti.

N. Poichè avete evidentemente provato esser l'azione proporzionale alla potenza, e allo spazio, ritorno indietro pel lungo cammino, ch'abbiam compito, ed esamino ciò, ch'è stato prodotto in questa materia. Adunque, dich'io, la forza viva è proporzionale alla massa nel quadrato della velocità; perchè essendo la forza viva quella forza, che si concepisce nel corpo in movimento proporzionale all'azione della forza morta, che dallo stato di quiete l'ha portato allo stato, in cui si ritrova, ovvero all'azione, che dallo stato di movimento è valevole di condurlo allo stato di riposo, è cosa evidente, che l'incremento, o il decremento della forza viva sarà proporzionale all'elemento dell'azione, cioè alla forza morta, ed allo spaziet-

zietto; ma la ragion composita della forza morta, e dello spazietto è la stessa, che la ragion composita della massa, della velocità, e del suo incremento, o decremento; dunque l'incremento, o il decremento della forza viva, sarà proporzionale alla massa, alla velocità, e all'incremento, o al decremento della medesima; e perciò prendendo opportunamente gli integrali, si troverà l'intera forza viva proporzionale alla massa nella metà del quadrato della velocità. Adunque è verissimo il principio del Co: Riccati, che se ad allungar per una certa maniera una corda elastica si richiede forza proporzionale alla lunghezza della corda, la stessa forza sarà necessaria ad ottenere in qualunque altro modo la medesima distrazione; perchè essendo la tenacità della corda e nell'un caso, e nell'altro respettivamente la stessa, essendo pur eguali gli spazj, eguali similmente saranno le azioni della tenacità; ma la forza richiesta a distender la corda, dev'eguagliare l'azion della tenacità; dunque è necessaria sempre la stessa forza a produr in qualsivoglia maniera la medesima distrazione. Adunque non si è partito dal vero il Bernoulli, quando ha supposto, che il numero degli elastri chiusi sia l'effetto della forza viva, che estinguesi, e il numero degli elastri, i quai apronsi, sia la cagione della forza viva, che si produce; perciocchè il vero effetto, e la vera cagione è l'azione dell'elasticità, la quale è proporzionale alla stessa elasticità, ed allo spazio, per cui si chiudono, ed aprono gli elastri, e questa ragione è la stessa, che la ragione del numero degli elastri chiusi, ed aperti; ma il numero degli elastri chiusi, ed aperti, è come la massa nel quadrato della velocità; dunque gli effetti, e le cagioni delle forze vive, e per conseguenza le medesime forze vive sono, come le masse nel quadrato della velocità. La stessa riflessione si applichi alle fosse scavate nella materia cedente, le quali, se sono state considerate da' leibniziani siccome effetti della forza viva, col mettere però a computo le resistenze diverse, non sonosi dilungati dal vero.

C. A me sembra, che sieno andati del pari i cartesiani, e i leibniziani nel suppor cosa ne provata, ne certa: ma che questi stati sieno non più cauti, ma solo più fortunati de' primi; conciossiachè la supposizione per essi fatta col nuovo metodo, e co' principj metafisici, si è scoperta alla ragione con-

for-

forme, e alla verità, laddove la ſuppoſizione de' carteſiani ha incontrata la ſventura di rimaner convinta di falſità.

L. Sebbene voi riflettete acconciamente; pure convien confeſſarlo, che le ragioni de' leibniziani prevalevano in veriſimiglianza a quelle de' carteſiani. Ma laſciando ſtar queſto, entriamo nelle leggi della comunicazione del movimento.

N. Entrando dunque in nuova materia, diamo omai incominciamento al noſtro congreſſo, nel quale io non penſo eſſere neceſſario, che ſtabiliamo con novella dimoſtrazione le leggi della comunicazione del movimento o per riguardo ai corpi inerti, o a' corpi perfettamente elaſtici, o a quelli, che ſon di mezzo; ma che ſuppoſte queſte, diſaminiamo quali argomenti dedur ſi poſſano in favore dell'una, e dell'altra ſentenza, e qual peſo abbiano.

L. Così è: ma pure ſarà bene, che alcun di voi faccia vedere, in qual guiſa dall' opinion del Carteſio diſcendano le leggi della comunicazion del movimento già conoſciute; che io mi prenderò il carico di derivarle dalla ſentenza del Leibnizio. Appreſſo ſarà da diſcuterſi, qual de' due metodi ſia più giuſto, ragionevole, e vero.

C. Darò principio col dimoſtrare per qual maniera le note leggi della comunicazione del movimento diſcendano dal canone carteſiano, che le forze vive ſono in ragione della quantità del movimento. Sieno due corpi A, B, i quali verſo la medeſima piaggia viaggino colle velocità V, u. Queſti prima dell' urto ſono dotati di forze vive, che s'eſprimono pei prodotti A V, B u. Venuti che ſono all'urto, non potendo il corpo A proſeguire colla ſua velocità, per l'impedimento, che gli reca il corpo B, più tardo, e lento, è neceſſario, che il corpo A tanta forza trasferiſca al corpo B, quanta è neceſſaria, perchè amendue uniti inſieme camminino colla ſteſſa celerità. Perlochè quanto per l'urto la forza ſarà diminuita nel corpo A, tanto ſi troverà accreſciuta nel corpo B; e perciò la ſomma delle forze, onde ſon dotati i corpi dopo l'urto, dev' eſſer eguale alla ſomma delle forze primitive, perchè quanta forza ha perduta il corpo A, tanta ſe n'è trasferita nel corpo B; dunque ancor dopo l'urto la ſomma delle forze dev'eſſere A V + B u, la quale ſe dividaſi per la ſomma delle maſſe, le quali unite inſieme ſi muovono, avremo la comune velocità

dopo

dopo l'urto $= \frac{AV + Bu}{A + B}$, ficcome i fenomeni han difcoperto.

Se la velocità del corpo B foffe contraria a quella del corpo A, allora tanta forza fi perderà nel corpo A, quanta nel corpo B, effendo che le forze contrarie, per quanto eguali fono, s'elidono, e fi diftruggono. Quindi ripetendo il difcorfo, fi ritroverà la comune velocità dopo l'urto $= \frac{AV - Bu}{A + B}$. E fe le forze de' corpi A, B, avanti l'urto foffero eguali, effi nell'urto fi fermerebbero, e dopo d'effo la velocità comune farebbe nulla.

L. Così appunto i cartefiani ragionano; profeguite, e da quella azione, che è comune a' corpi inerti, ed elaftici, fate a quella paffaggio, ch'è propria de' foli elaftici; acciocchè tutta la teoria fi vegga diftefa, e non interrotta.

C. Per così fatto paffaggio è neceffario ftabilire qual fia la forza dell'urto, o della percoffa. Effendo appreffo l'urto la velocità $= \frac{AV + Bu}{A + B}$, farà la forza del corpo A $= \frac{A^2V + ABu}{A + B}$; e quella del corpo B $= \frac{ABV + B^2u}{A + B}$; ma innanzi all'urto il corpo A era dotato della forza $= AV$; dunque nell'urto ha perduta la forza $= AV \frac{- A^2V - ABu}{A + B} = \frac{A^2V + ABV - ABu - A^2V}{A + B}$ $= \frac{AB}{A + B} \cdot \overline{V - u}$. Similmente avanti l'urto, il corpo B avea la forza $= Bu$; dopo la forza maggiore $\frac{ABV + B^2u}{A + B}$; dunque egli ha acquiftata la forza $= \frac{ABV + B^2u}{A + B} - Bu =$ $\frac{ABV + B^2u - ABu - B^2u}{A + B} = \frac{AB}{A + B} \cdot \overline{V - u}$; le quali formule palefano, che la forza perduta dal corpo A, eguaglia la forza acquiftata dal corpo B. Ma la forza dell'urto, o fia della percoffa è eguale sì alla forza perduta dal corpo A, sì all'acquiftata dal corpo B; dunque farà $= \frac{2AB}{A + B} \cdot \overline{V - u}$.

Se

Se i corpi A, B ſi veniſſero incontro; ſuppoſto che A abbia maggior forza di B, la forza della percoſſa ſarà eguale alla forza perduta dal corpo A, alla perduta dal corpo B, ed alla acquiſtata per la direzione contraria dallo ſteſſo corpo; onde rifacendo il calcolo, ritroveraſſi la forza dell'urto, o della percoſſa eſſer $= \frac{2AB}{A+B} \cdot \overline{V+u}$. Avvertaſi, che nel primo caſo $V-u$, e nel ſecondo $V+u$ viene ad eſſere la velocità reſpettiva; onde conſervati gli ſteſſi corpi, la forza dell'urto vien ſempre ad eſſer proporzionale alla velocità reſpettiva, con cui ſi avvicinano.

Ritrovata in così fatta guiſa la forza della percoſſa, o dell'urto, biſogna avvertire, che ſe i corpi urtati, o compreſſi ſono elaſtici, la quantità della forza elaſtica, con cui ſi ſpiegano, vien ad eſſer eguale alla forza dell'urto, ſe i corpi ſono perfettamente elaſtici, ſe no, avrà ad eſſa una coſtante ragione. Conſideriamo il caſo de' corpi perfettamente elaſtici. La forza elaſtica $= \frac{2AB}{A+B} \cdot \overline{V-u}$ ſi divide egualmente all'uno, ed all'altro corpo; ma è contraria al moto del corpo A, coſpirante al moto del corpo B; dunque, poichè i corpi in qualità d'inerti viaggiano con una comune velocità, ſarà di meſtieri levare alla forza del corpo A, ed aggiungere alla forza del corpo B la forza $= \frac{AB}{A+B} \cdot \overline{V-u}$. Quindi la forza del corpo A, dopo la reſtituzione, ſarà $= \frac{A \cdot \overline{AV+Bu}}{A+B} - \frac{AB}{A+B} \cdot \overline{V-u} = \frac{A^2V + ABu - ABV + ABu}{A+B} = \frac{A^2V + 2ABu - ABV}{A+B}$. E la forza del corpo B ſarà $= \frac{B \cdot \overline{AV+Bu}}{A+B} + \frac{AB}{A+B} \cdot \overline{V-u} = \frac{B^2u + ABV - ABu + ABV}{A+B} = \frac{B^2u + 2ABV - ABu}{A+B}$. Si divida l'una, e l'altra per la maſſa, in che riſiede, e ſi avrà la velocità del corpo A $= \frac{AV + 2Bu - BV}{A+B}$; e la velocità del corpo B $= \frac{Bu + 2AV - Au}{A+B}$; le quali formule ſono appunto quelle ſteſſe, che ſi raccolgono dal principio della ſperienza.

Queste stesse formule servono anche al caso, in cui i corpi si vengono incontro, bastando prender la u come negativa, ovvero mutar il segno a tutti que' termini, ove la u si ritrova.

Altro avvertir non voglio, se non che alla forza primitiva del corpo $A = AV$ si è levata prima nella costipazione la forza $\frac{AB}{A+B} \cdot \overline{V-u}$, che è la metà della forza dell'urto: indi nella restituzione dalla forza elastica gli è stata levata parimente la stessa forza $\frac{AB}{A+B} \cdot \overline{V-u}$. Adunque a ritrovar la forza, che risiede nel corpo A, dopo l'intera azione di compressione, e restituzione, basterà alla sua forza primitiva sottrarre l'intera forza dell'urto. Similmente si troverà, che ad ottenere la forza del corpo B, dopo la restituzione, basterà alla sua forza primitiva aggiungere l'intera forza dell'urto.

Quello che detto abbiamo de' corpi perfettamente elastici, usando dello stesso metodo, s'applica a' corpi imperfettamente elastici, ne' quali la forza, che in virtù dell'elasticità si restituisce, non eguaglia, ma sol riguarda con una data proporzione la forza dell'urto. Se questa ragione si esprima per la ragione di $m : n$, la forza elastica, che si restituisce, sarà $= \frac{2n \cdot AB \cdot \overline{V-u}}{m \cdot \overline{A+B}}$. Levando dunque alla forza del corpo A, viaggiante in qualità di corpo molle, la metà di così fatta forza, avremo la forza dopo la restituzion della molla nel corpo $A =$

$$\frac{A \cdot \overline{AV + Bu}}{A+B} - \frac{nAB \cdot \overline{V-u}}{m \cdot \overline{A+B}} = \frac{mA^2V + \overline{m+n} \cdot ABu - nABV}{m \cdot \overline{A+B}},$$

e dividendo per A, si avrà la velocità del corpo $A = \frac{mAV + \overline{m+n} \cdot Bu - nBV}{m \cdot \overline{A+B}}$.

Similmente aggiungendo la metà della forza elastica alla forza, con che B cammina insieme col corpo A, si troverà la sua forza dopo la restituzione $= \frac{mB^2u + \overline{m+n} \cdot ABV - nABu}{m \cdot \overline{A+B}}$, e dividendo questa forza per B, si troverà la velocità dello stesso

ſteſſo corpo $= \frac{mBu + \overline{m+n} \,.\, AV - nAu}{m \,.\, \overline{A+B}}$. Le quali formule ſono notiſſime, e vagliono ancora quando i corpi ſi vengono incontro, dovendoſi prendere in tal caſo la velocità u come negativa.

Ritrovate le velocità de' mobili, tanto dopo la compreſſione, quanto dopo la reſtituzione, ſarà coſa facile a determinare il moto del centro delle maſſe, la quantità della velocità reſpettiva, ed altre belliſſime verità, che nella comunicazione del movimento ſi oſſervano.

N. Non è noſtro incarico di far un ragionamento ſopra le leggi della comunicazione di movimento, che già ſon note; ma di eſaminare la controverſia della forza viva. Avete con chiarezza dimoſtrato, ſiccome dalla ſentenza, che pone le forze vive proporzionali alle quantità del movimento, deducanſi le leggi della comunicazione del movimento. E per certo il diſcorſo ſembra sì ragionevole, e ſodo, il metodo sì ſemplice, e chiaro, onde approvazione riportar può la carteſiana ſentenza. Ma prima di pronunziare, biſogna aſcoltare il Sig. Lelio, che s'apparecchia di dedurre le ſteſſe leggi dalla ſentenza del Leibnizio.

L. Prima d'incominciare, voglio uſar d'un breve proemio, ricordandovi, che la natura nelle ſue operazioni non ſegue quel giro di calcolo, di cui noi abbiamo di biſogno per diſcuoprirne l'economia. Laonde la ſemplicità della dimoſtrazione, e del calcolo, non è buon criterio per diſcuoprire le leggi, e l'operazioni della natura. Voi vedete, che uſo dell'artificio rettorico a rimuovere il pregiudicio, che per parte della mia cauſa naſce dal calcolo più inviluppato di quello, che ſerve all'ipoteſi carteſiana. Ma comunque ſia men ſemplice, non ſarà però niente meno geometrico, e rigoroſo.

Io col dottiſſimo Sig. s'Graveſande, che mi porta innanzi la face a diradare le tenebre del cammino, faccio rifleſſione, che in qualſivoglia urto di corpi inerti, interviene, che l'un corpo, e l'altro ſi coſtipi, e s'ammacchi; nella qual contuſione è neceſſario, che s'impieghi, e ſi perda parte di quella forza, di cui prima dell'urto erano forniti i due corpi; altrimenti vi avrebbe un effetto in natura, cui nulla cagion produrrebbe, la qual coſa è aſſurda, quanto altra mai.

C. Ma qui soffermatevi, che non siamo d'accordo. In questo effetto di contusione forza alcuna non si dee perdere; perciocchè ...

L. Datemi perdono, se vi tronco le parole in bocca. Io domandovi, che mi rendiate la pariglia, e siccome io non ho interrotto il progresso della vostra dimostrazione, comunque parecchi dubbj mi sorgesser nell'animo, così vi prego, che nonostante le difficoltà, che vi nascono, non interrompiate il mio metodo. Poichè l'avrò esposto, avrete tutta la libertà di obbiettare, siccome a me sarà similmente concessa d'opporre al vostro.

Dunque è di mestieri, che parte della forza primitiva, onde erano i corpi forniti, nella vicendevole contusione si spenda; la qual compita, è pur di mestieri, che i due corpi uniti insieme, e congiunti viaggino con una comune celerità; dunque l'altra parte della forza primitiva rimarrà viva ne' medesimi corpi. Ora pel principio, che la causa piena deve il pieno, ed intero effetto eguagliare, è necessario, che la forza primitiva de' due corpi eguagli sì quella, che nella contusione si spende, sì quella, che, formata la contusione, rimane viva ne' corpi. Si chiamino i corpi, che vanno all'urto A, B, le velocità loro V, u, la velocità comune dopo l'urto $= z$, la forza, che nella contusion si consuma, $= M$. Ciò posto, si avrà

$$\frac{AV^2}{2} + \frac{Bu^2}{2} = \frac{\overline{A+B}\cdot z^2}{2} + M.$$

Da così fatta equazione non è possibile il ricavare il valor di z, perchè essendo incognita anche la M, l'equazione è indeterminata. Dunque ad isciogliere il nostro problema, è d'uopo ricorrere ad un altro principio, per cui mezzo si faccia dall'equazione svanir la M, e rimanga la sola z. Io non saprei a qual più sicuro principio appigliarmi, che a quel del moto translato, principio ammesso concordemente da tutti, e senza cui si verrebbe a turbare l'economia, e la buona condotta della natura. Collochiamo i corpi dentro una barchetta, che si muova colla celerità $= dw$, dentro la quale i corpi vadano ad incontrarsi colle celerità V, u. Il principio del movimento translato domanda, che siccome pel moto della barca l'una, e l'altra velocità V, u si accresce della parte dw,

così

così della stessa parte s'accresca la velocità dopo l'urto, che sarà però $= z + dw$. Di più nell'uno, e nell'altro caso la contusione, che i corpi soffrono, dev'esser la stessa, perchè è impossibile, che una contusione segua per que', che stanno sul lido, una per que', che viaggiano in barca. Applicando però anche a questo caso il canone leibniziano, si avrà $\frac{A.\overline{V+dW}^2}{2} + \frac{B.\overline{u+dW}^2}{2} = \frac{\overline{A+B}.\overline{z+dW}^2}{2} + M$; ovvero

$$\frac{AV^2}{2}+\frac{2AVdW}{2}+\frac{AdW^2}{2}+\frac{Bu^2}{2}+\frac{2BudW}{2}+\frac{BdW^2}{2}=\frac{\overline{A+B}.z^2}{2}+\frac{\overline{A+B}.2zdW}{2}+\frac{\overline{A+B}.dW^2}{2}+M.$$

nella quale cancellando $\frac{\overline{A+B}.dW^2}{2}$, che si ritrova dall'una parte, e dall'altra dell'equazione; di più levando dall'una parte $\frac{AV^2}{2}+\frac{BV^2}{2}$, dall'altra $\frac{\overline{A+B}.z^2}{2}+M$, che la prima equazione dimostra eguale, e finalmente dividendo per dw, si avrà $AV + Bu = \overline{A+B}.z$; ovvero $z = \frac{AV+Bu}{A+B}$, che è la formula conosciuta della velocità dopo l'urto.

Ritrovata la z, cioè la velocità dopo l'urto, cosa facile è il ritrovare la M, cioè la forza nella contusione perduta. Conciossiachè essendo $\frac{AV^2}{2}+\frac{Bu^2}{2}-\frac{z^2.\overline{A+B}}{2} = M$, avremo

$$\frac{AV^2}{2}+\frac{Bu^2}{2}-\frac{1.\overline{AV+Bu}^2}{2.\overline{A+B}} = \frac{A^2V^2+ABu^2-2ABVu+ABV^2+B^2u^2-A^2V^2-B^2u^2}{2.\overline{A+B}} =$$

$$\frac{AB}{2.\overline{A+B}}.\overline{V-u}^2 = M;$$ siccome si dovea ritrovare.

N. Sicchè per voi, quando dopo l'urto i corpi si fermeranno, tutta la forza primitiva si spenderà in produrre la contusione; ma allora essi si fermano, quando $z = o$; dunque quando $AV + Bu = o$, ovvero quando $AV = - Bu$, cioè quan-

quando le velocità, che debbon dirigerſi in parti contrarie, ſiccome il ſegno negativo dinota, ſono in ragion reciproca delle maſſe; dunque in queſto caſo la forza primitiva tutta ſi conſuma nella contuſione.

L. Così è per l'appunto: e di fatto ſe eguaglierete la forza primitiva alla forza, che nella contuſione s'impiega, ritroverete verificarſi così fatta proporzione. Conciosſiachè ſia $\frac{AV^2}{2} + \frac{Bu^2}{2} = \frac{AB \cdot \overline{V-u}^2}{2 \cdot \overline{A+B}}$, e moltiplicata l'equazione per $2 \cdot \overline{A+B}$, ſarà $A^2V^2 + ABV^2 + ABu^2 + B^2u^2 = ABV^2 - 2ABVu + ABu^2$, e cancellati i termini, che diſtruggonſi, e portati tutti gli altri alla ſteſſa parte dell'equazione, ſarà $A^2V^2 + 2ABVu + B^2u^2 = \overline{AV+Bu}^2 = o$, dalla qual ſi raccoglie quella proporzione, che voi pure trovata avete.

N. Se ho ben compreſo ciò, che poco innanzi avete detto, la teoria del moto translato inſegna, che ove abbiaſi la ſteſſa velocità reſpettiva, ivi dee neceſſariamente prodursi la medeſima contuſione, e per conſeguenza la ſteſſa forza dee conſumarſi; dunque quando tutta la forza primitiva nella contuſione s'impiega, dovrà eſſer la minima di tutte l'altre, ſuppoſta la ſteſſa velocità relativa. Veggiamo, ſe ciò ſia vero. Io cerco dunque la minima $\frac{AV^2}{2} + \frac{Bu^2}{2}$, poſto, che $V - u$ ſia coſtante. Prendo le differenze, e trovo, ſecondo il metodo de' maſſimi, e de' minimi, $AVdV + Budu = o$; ma eſſendo $V - u$ coſtante, ſarà $dV - du = o$, ovvero $dV = du$; dunque fatta la ſoſtituzione, ſi avrà $AVdV + BudV = o$, e dividendo per dV, $AV + Bu = o$, ovvero $AV = - Bu$, che appunto è il caſo, ove ſi conſuma tutta la forza; onde le coſe vanno a ſeſta perfettamente.

L. Se volete un'altra dimoſtrazione, ſenza biſogno del metodo de' maſſimi, e de' minimi, eccovela. Dico pertanto, che quando ſia $AV = Bu$, ſupponendo per maggior ſemplicità del calcolo u poſitiva, benchè alla parte oppoſita ſi diriga, la forza $\frac{AV^2}{2} + \frac{Bu^2}{2}$, ſarà la minima, che aver ſi poſſa, ſervata la

ta la ſteſſa velocità reſpettiva $V + u$. Sì accreſca la velocità V di qualunque parte dw, e ſi diminuiſca la u della ſteſſa parte; chiara coſa è, che non ſi cangerà velocità reſpettiva. Ciò poſto, in queſta novella ipoteſi, ſarà la forza del corpo $A = \frac{AV^2}{2} + \frac{2AVdw}{2} + \frac{Adw^2}{2}$, e la forza del corpo $B = \frac{Bu^2}{2} - \frac{2Budw^2}{2} + \frac{Bdw^2}{2}$; delle quali due forze, ognun vede, qual ſia la ſomma; ma per l'ipoteſi $AV - Bu = o$, e però i termini, che poſti ſono in ſecondo luogo, ſi diſtruggono. Reſta dunque la ſomma delle forze $= \frac{AV^2}{2} + \frac{Adw^2}{2}$, della

$$\frac{Bu^2}{2} + \frac{Bdw^2}{2}$$

quale è ſempre minore $\frac{AV^2}{2} + \frac{Bu^2}{2}$; dunque minima è la forza de' corpi, quando ſi vengono incontro con velocità, le quali ſono reciprocamente proporzionali alle maſſe.

Ma io abbandono il progreſſo della mia dimoſtrazione; è però bene aver fatte queſte rifleſſioni; ma non ne aggiungiam dell'altre, finchè la dimoſtrazione non è compita. Derivate dalla ſentenza del Leibnizio le leggi, con che camminano appreſſo l'urto in qualità d'inerti, biſogna paſſare al cangiamento, che vien prodotto dalla loro reſtituzione, quando d'elaſticità ſon dotati. E per iſpedirci più toſtamente, uniremo i perfettamente, e gl' imperfettamente elaſtici. Quella forza, che nella contuſione s'impiega, e per così dire, che di viva paſſa in morta, quando i corpi abbiano elaſticità, quella ritorna a vivere o tutta, o in parte; tutta, ſe l'elaſticità è perfetta, in parte, ſe l'elaſticità è imperfetta. Ora ſia $m^2 : n^2$, così la forza M nella contuſione impiegata a quella, che per l'elaſticità ſi reſtituiſce, la quale ſi eſprimerà per $\frac{n^2 \cdot M}{m^2}$. La ſomma delle forze, di che ſi ritrovano forniti i corpi dopo la reſtituzion loro, dev' eguagliare la forza, di che eran dotati, quando viaggiavano in qualità di corpi molli, e quella, che in vigor

vigor dell'elaſticità di nuovo ſi eccita. Chiaminſi x, y le velocità de' corpi A, B dopo la reſtituzion delle parti loro. Sarà dunque $\frac{Ax^2}{2} + \frac{By^2}{2} = \frac{\overline{A+B}.z^2}{2} + \frac{n^2 M}{m^2}$, merce che ritengo l'altre denominazioni. Da queſta equazione ſola, perchè ha due incognite x, y, non è poſſibile ne dell'una, ne dell'altra ritrovar il valore. Domandiam però ajuto al principio del moto translato, e conſideriamo i corpi poſti in una barchetta, che ſi muova colla velocità $= dw$. Chiariſſima coſa è, che le velocità x, y, z reſteranno accreſciute della parte $= dw$; ma ſiccome la ſteſſa è la contuſione, la ſteſſa la forza, che in eſſa ſi ſpende; così la ſteſſa sarà la reſtituzione, e la forza, che per eſſa ravvivaſi. Dunque avremo l'altra equazione $\frac{A.\overline{x+dw}^2}{2} + \frac{B.\overline{y+dw}^2}{2} = \frac{\overline{A+B}.\overline{z+dw}^2}{2} + \frac{n^2.M}{m^2}$; ovvero

$$\frac{Ax^2}{2} + \frac{2Axdw}{2} + \frac{Adw^2}{2} + \frac{By^2}{2} + \frac{2Bydw}{2} + \frac{Bdw^2}{2} = \frac{\overline{A+B}.z^2}{2} + \frac{\overline{A+B}.2zdw}{2} + \frac{\overline{A+B}.dw^2}{2} + \frac{n^2 M}{m^2}.$$

Cancellando i termini, che diſtruggonſi; di più levando dall'una parte $\frac{Ax^2}{2} + \frac{By^2}{2}$, e dall'altra $\frac{\overline{A+B}.z^2}{2} + \frac{n^2 M}{m^2}$, i quai termini per la prima equazione ſappiamo eſſer eguali, rimarrà, dividendo per dw, $Ax + By = \overline{A+B}.z$. Combinando queſta equazion, colla prima determineremo i valori delle x, y. Si può adoprare nella ſeguente maniera. Si traſporti il termine Ax, e ſi avrà $By = \overline{A+B}.z - Ax$. S'alzi al quadrato, e ſi divida per 2 B, e avraſſi $\frac{By^2}{2} = \frac{\overline{A+B}^2.z^2}{2B} - \frac{2A.\overline{A+B}.zx}{2B} + \frac{A^2 x^2}{2B}$. Il valore di $\frac{By^2}{2}$ ſi coſtituiſca nella prima equazione, e ſarà $\frac{Ax^2}{2} + \frac{A^2 x^2}{2B} - \frac{2Azx.\overline{A+B}}{2B} + \frac{\overline{A+B}^2.z^2}{2B} =$

$\overline{A+B}$

$\frac{\overline{A+B}\cdot z^2}{2} + \frac{n^2 M}{m^2}$; ovvero $xx - 2zx + zz = \frac{2n^2 BM}{m^2 \cdot A \cdot \overline{A+B}}$;

ma $2M = \frac{AB \cdot \overline{V-n}^2}{A+B}$, ficcome fi è ritrovato di fopra; dunque $xx - 2zx + zz = \frac{n^2 B^2 \cdot \overline{V-n}^2}{m^2 \overline{A+B}^2}$, ed eftraendo la radice $z - x = \frac{nB \cdot \overline{V-n}}{m \cdot \overline{A+B}}$. Eftraggo la radice $z - x$, e non $x - z$, perchè dalla velocità $= z$, con che i corpi viaggiano infiememente, devefi fottrar quella, che vien prodotta nel corpo A dall' efpanfion della molla; dunque fi avrà $x = z - \frac{nB \cdot \overline{V-n}}{m \cdot \overline{A+B}}$; ma $z = \frac{AV + Bn}{A+B}$, per ciò, che abbiam dimoftrato ne' corpi inerti; dunque $x = \frac{AV + Bn}{A+B} - \frac{nB \cdot \overline{V-n}}{m \cdot \overline{A+B}} = \frac{mAV + \overline{m+n} \cdot Bn - nBV}{m \cdot \overline{A+B}}$, ficcome voi avete trovato. Con fomigliante metodo fi ritrova $y = \frac{mBn + \overline{m+n} \cdot AV - nAn}{m \cdot \overline{A+B}}$.

Quefte due formule, comunque fimili alla voftra, fono però differenti in quefto, che per voi la proporzione di $m : n$ è, come la forza della percoffa alla forza elaftica; ma per me la forza, che nella contufione s'eftingue, a quella, che in virtù dell' elafticità fi ravviva, è come $m^2 : n^2$. Le predette formule, quando l'elafticità è perfetta, cioè quando $m = n$, fi cangian nelle feguenti $x = \frac{AV + 2Bn - BV}{A+B}$, $y = \frac{Bn + 2AV - An}{A+B}$, che fono le note formule appartenenti a' corpi perfettamente elaftici.

N. Sebbene quefto voftro progreffo non fia così femplice, come quello del Sig. Cefare, pure fembrami molto elegante, e non è certamente meno geometrico. Ma qual de' due è più ragionevole, e qual s'appoggia fopra i veri principj fifici?

C. Sembra ficuramente, che il mio, e porteronne una ragio-

gione, la quale appresso di me è stata sempre di grandissima forza, e prima che per noi si facesse insieme parola di queste cose, m'avea fermato per guisa, che la sentenza cartesiana riputava per infallibile. Noi, in virtù delle leggi ricavate, ritroviamo, che i due corpi, i quali si vengono incontro con velocità, che sieno in ragion reciproca delle masse, perdono ogni movimento, e alla quiete riduconsi; e che sempre dopo l'urto il moto dirigesi a quella parte, ove era prima diretto il corpo, dotato di maggior quantità di movimento. *Questo* principio non è messo in dubbio da chi che sia. Ricorriamo al presente a' principj metafisici sommamente evidenti. Principio è, che quando due forze eguali entrano in azione una contro all'altra, niuna può superare, ma devonsi contrabilanciare; che di due forze ineguali, la maggiore dee sempre vincere la minore. Questi principj stanno fermissimi nel sistema cartesiano, perchè quando i corpi si fermano, le quantità del moto, ovvero le forze si ritrovano eguali, e negli altri casi sempre il movimento dopo l'urto segue la direzione della forza maggiore. Ma i predetti principj metafisici si mantengono eglino egualmente nella sentenza leibniziana? No certamente: perchè nel caso, ove i corpi si fermano, essendo eguali le quantità del movimento A V, B u, saranno le forze vive leibniziane $\frac{AV^2}{2}$, $\frac{Bu^2}{2}$, come le velocità V, u, ovvero in ragion reciproca delle masse, che si suppongono disuguali; dunque due forze ineguali, entrando in azione, dovrebbero contrabilanciarsi, e distruggersi, lo che è contrario al secondo de' principj già stabiliti. Sarebbe più conveniente all'opinione del Leibnizio, che allora si fermassero i corpi, quando le forze $\frac{AV^2}{2}$, $\frac{Bu^2}{2}$ sono eguali: e pure confessano, che dopo l'urto si avrà il movimento secondo la direzion del corpo A, se $AV > Bu$, o all'opposito; dunque non regge ne pure il primo principio. Ma che direte, se secondo il Leibnizio debba accadere, che una forza minore superi la maggiore? Egli è costante, che il moto, dopo l'urto, dirigesi a quella parte, ove era diretta

la

la maggior quantità di movimento. Or si può dar caso, che AV sia maggior di Bu, e che non ostante AV^2 sia minor di Bu^2. E per apportarne un esempio. Sia $B = 8$, $A = 1$, la velocità di B, $= u = 1$, la velocità di A, $= V = 3$; sarà $Bu = 8$, $AV = 3$; ma $Bu^2 = 8$, $AV^2 = 9$; dunque in questo caso il movimento sarà diretto, ove spingea la forza minore, che per conseguenza vincerà la maggiore; la qual cosa, se non è l'assurdo degli assurdi, qual altra lo sarà mai?

L. Ma come vi piace la riflessione del Sig. s'Gravesande, il qual sostiene, che il fermarsi de' corpi, essendo le quantità de' moti eguali, non proviene, perchè sieno eguali le forze, ma perchè amendue s'impiegano nel formare la contusione; così quando il movimento appresso l'urto seguita la direzione del corpo dotato di minor forza, proviene unicamente per ciò, che la forza maggiore tutta nella contusione si spende, non così la minore, di cui alcuna parte ne riman viva; e però il movimento a questa ubbidisce.

C. Permesso, e non concesso, che si consumi forza nella contusione, l'addotto argomento rimane vigoroso, siccome prima; perchè non è percettibile, siccome due forze ineguali tutte intere nella contusione s'estinguano; molto meno, siccome non consumata la minor forza, siasi interamente la maggiore distrutta, dovendosi anzi dire, che la minore, insieme con una parte eguale della maggiore, nella contusione si spenda, restando viva l'altra parte, che dee dirigere il corpo a quel verso, ove era prima diretto il corpo dotato di maggior forza; e che due forze eguali tutte intere si devono consumare.

N. Questa opposizione del Sig. Cesare mi pare vera, e sembrami, ch'ella prenda la forza dal notissimo assioma dell' egualità tra l'azione, e la reazione, che è stato in fisica stabilito dal Cav. Newton, e concordemente da tutti i geometri ricevuto. Conciossiachè in mezzo ai due corpi, che vengono all'urto, io concepisco costituita una forza, come per esempio una serie d'elastri; egli è chiaro, che i due corpi devono perdere tali forze, le quali sieno proporzionali a quelle azioni, che contra di loro vengono dalla virtù elastica esercitate; ma essendo per l'assioma l'azione eguale alla reazione, è necessario, che la serie degli elastri, esercitando per l'una parte

una azione determinata, nello ſteſſo tempo eſerciti per l'altra un' eguale reazione; e però le azioni, nello ſteſſo tempo per lei eſercitate, ſaranno eguali, dunque le forze, da due corpi nello ſteſſo tempo perdute, ſaranno eguali; dunque ſe i corpi, che ad urtarſi vengono, ſaran dotati di forze eguali, nello ſteſſo tempo ne ſaranno ſpogliati, e per conſeguenza ſi fermeranno, ma ſe d'ineguali forze foſſero provveduti, la minore dev' eſtinguerſi in più breve ſpazio di tempo, che la maggiore, e per conſeguenza appreſſo l'urto là ſi drizzerà il movimento, dove la maggior forza è diretta.

L. E pure la riſpoſta del Sig s'Graveſande è veriſſima, ma fa di meſtieri collocarla ben nel ſuo lume. Prima però le coſe dette dal Sig. Neſtore mi chiamano a diſcutere il principio dell'egualità tra l'azione, e la reazione, che l'incomparabile Sig. Newton premette alla ſua grand'opera de' principj matematici. Egli può ricevere molti, e varj intelletti, e in diverſe circoſtanze, ed a diverſi uſi ho oſſervato molti farſene ſcudo parecchie volte. Perciò ſarà coſa utile aſſai il diſtinguere i molti ſenſi, in cui può intenderſi, e il dichiarare in quai ſia vero, in quai falſo, in quai controverſo.

In primo luogo è certiſſimo, che non potendoſi un corpo per ſe medeſimo partire da quello ſtato, in cui è, e portare ad un altro qualunque ſtato, egli è meſtieri, che v'intervenga una determinata azione di qualche potenza, che produca così fatta mutazione di ſtato. Di più, a laſciare il novello ſtato, ed a ritornare allo ſtato di prima, conviene, che ne ſia coſtretto da un'altra azione, la quale eſſendo alla prima onninamente contraria di direzione, ſi potrà per rapporto ad eſſa reazion chiamare. Onde in queſto ſenſo, per nome d'azione, s'intende quella, che produce una determinata mutazione di ſtato; per nome di reazione quella, la quale la fatta mutazione diſtrugge, e ritorna il corpo allo ſtato primiero.

C. In queſto primo ſenſo l'aſſioma è evidente; perchè il portarſi del corpo dallo ſtato A allo ſtato B, ovvero dallo ſtato B allo ſtato A, ſi vuol riguardare, come una medeſima, o almen come una eguale mutazione di ſtato, e per conſeguenza come un eguale effetto; ma a produr eguali effetti, eguali cauſe richiedonſi; dunque l'azione, che traſferiſce il corpo dallo ſtato A allo ſtato B, dev'eſſer eguale alla reazione, ovvero all'

all' azione contraria, che dallo ſtato B allo ſtato A lo ritorna.

L. Il dottiſſimo Sig Giovanni Bernoulli riceve, e ſpiega in un altro ſenſo l' aſſioma. Ogni qual volta una forza morta, applicata ad un corpo, agiſce contra di lui, ſi concepiſce l' inerzia del medeſimo corpo reagire in parte contraria egualmente, e non permettere, che in quella maſſa ſi faccia mutazione di ſtato, ſe ad eſſa non ſi doni, o non ſi tolga una forza proporzionale all' azione eſercitata dalla potenza.

N. L' aſſioma in queſto ſenſo, che altro non contiene, ſe non un modo di concepir de' geometri, per le coſe dette fin dalla prima giornata, appariſce, che ſi può ricevere, ma con la dovuta cautela; mercecchè non biſogna concepire l' azion dell' inerzia, interamente ſimile all' altre azioni, perchè ſarebbe coſa impoſſibile a concepire, ſiccome il corpo riceveſſe il movimento; perciocchè qualunque volta un corpo ſia poſto in mezzo a due azioni eguali, e contrarie, l' una dee l' altra impedir per modo, che nulla azione s' eſerciti, ed il corpo in equilibrio ripoſi. Perciò l' azion dell' inerzia non ſi dee concepire, come valevole ad impedire l' azione della potenza, ma ſiccome tale, che obblighi queſta a traſfondere, o a toglier al corpo una forza eguale alla ſua energia. Quindi è, che l' incremento, o il decremento della forza viva dev' eguagliare l' azione della potenza.

L. In oltre ho udito parecchie volte taluno ſervirſi del newtoniano aſſioma per provare, che due corpi, i quali vengono all' urto, devono ammaccature eguali ſoffrire. In queſto ſenſo l' aſſioma è falſiſſimo, eſſendo noto a chi che ſia, che la profondità, e la grandezza delle ammaccature dipende, non meno dalla figura, che dalla natura de' corpi. E chi è, che non ſappia, che ſe due corpi eguali, di figura ſimile, e della ſteſſa durezza vengano all' urto, le ammaccature nell' uno, e nell' altro ſaranno onninamente ſimili, ed eguali; ma ſe uno ſarà più molle, l' altro più duro, moltiſſima contuſione ſoffrirà il primo, poca il ſecondo.

Di più, ſebbene a parlar propriamente, la preſſione, e l' azione ſieno quantità di diverſo genere, come la linea, e la ſuperficie; pure quando non v' ha meſtieri di un' eſattiſſimo rigor nel parlare, le preſſioni non di rado col nome d' azioni s' eſprimono; e ad eſſe pure è ſtato applicato l' aſſioma del New-

Newton; nel qual caſo, a parlar rigoroſamente, dire ſi dovrebbe, che la preſſione è eguale alla repreſſione. In tali circoſtanze ſi può così intendere l'aſſioma, che in caſo d'equilibrio, alla preſſione di qualunque potenza, s'oppone una preſſione contraria, che l'equilibra, e la ſoſtiene. Così ſe un corpo grave è poſto ſopra un piano, ſi prova, che il piano preme il corpo all'in ſu, con una preſſione eguale alla gravità; così ſe il liquore è rinchiuſo dentro in un vaſo, ſi prova, che i lati del vaſo premono il liquore con quella preſſione, onde dal liquor ſon premuti. E finchè ci fermiamo nell'equilibrio di due potenze, l'aſſioma è ſenza eccezione; ma ſe una faceſſe equilibrio con due, vero non ſarebbe, che la ſomma di queſte a quella foſſero eguali; ma ſarebbe d'uopo, per rinvenir la quantità loro, far uſo del canone della compoſizione, e della riſoluzion delle potenze, ſiccome è notiſſimo.

N. Io penſo, che nel caſo dell'equilibrio, in qualunque numero di potenze, ſarebbe vero l'aſſioma, qualor dal ſenſo improprio, il nome d'azione, al ſenſo proprio ſi traſportaſſe. Se poſto qualunque numero di potenze, in quelle circoſtanze, in cui devono far equilibrio, s'intenda ſeguire qualunque infiniteſima azione, voi avete dimoſtrato, che le due ſomme dell'azioni contrarie ſi trovano eguali ſquiſitamente; dunque ſi verificherà, che in egual tempo una, o più potenze eſerciterebbero azione eguale, e contraria alla ſomma dell'azioni di tutte l'altre; la qual'egualità s'ottiene mai ſempre, dove interviene compoſizione, o riſoluzione di forze. Laonde nel caſo dell'equilibrio, l'azione è eguale alla reazione, non l'azione, o la reazion eſercitata, la quale è nulla, ma la ſomma dell'azioni, che ſi eſerciterebbero da alcune potenze, ſe l'altre non vi foſſero, ſarebbe eguale, e contraria alla ſomma dell'azioni, o delle reazioni, che in tempo eguale ſi eſerciterebbe da queſte, ſe non vi fuſſer le prime.

L. Voi vi ſervite acconciamente delle coſe dichiarate, e ſiccome io penſo, dimoſtrate ne' dì paſſati. Richiamando l'azione nel ſenſo improprio, cioè la preſſione, l'aſſioma può ricevere il ſeguente intelletto; che ſe una forza ſi concepiſce poſta in mezzo a due corpi, come ſarebbe a dire una corda di cetra, ella ſollecita amendue i corpi con preſſioni eguali, e contrarie, onde la preſſione applicata ad un corpo ſia eguale alla

alla repreſſione applicata all' altro. L' aſſioma in queſto ſenſo è veriſſimo, e ricevuto concordemente da tutti; e noi in quella giornata, ove abbiam fatta parola della teoria comparata degli elaſtri, l' abbiamo, ſiccome penſo, fatto toccar con mano.

N. Io ſon d' avviſo, che queſto ſia l' intelletto, in cui l' incomparabile Cav. Newton riceve il ſuo aſſioma; e me lo perſuadono gli eſempj, de' quai ſi ſerve per dichiararlo; de' quali il primo è, che ſe un uomo prema con un dito una pietra, dalla pietra vien ſimilmente il dito repreſſo.

L. Così potrebbe parere, ſe ad altro non ſi poneſſe mente, che al primo eſempio da voi ricordato. Dirò di più, che così potrebbe parere, ſe ſi riguardaſſe ſolamente all' uſo, che di tal' aſſioma fa nella ſua grand' opera de' principj matematici. Concioſſiachè il principal uſo, ch' egli faccia del ſuo principio, ſerve ad iſtabilire le forze, onde ſon ſollecitati due corpi, i quali vicendevolmente ſi attraggono. Or noi poſſiamo conſiderar l' attrazione, come una forza, la quale in mezzo a due corpi ſia collocata a guiſa d' una corda elaſtica, che li uniſce; dunque, ſiccome queſta, i due corpi egualmente ſolleciterebbe, così quella egualmente li ſollecita per direzioni contrarie. Quando dunque in cotal ſenſo l' aſſioma ſia vero, niente può mancare alla bellezza, e alla verità dell' opera newtoniana.

Ma convien confeſſarlo, il Signor Newton per gli altri eſempj, e ſpiegazioni, che apporta, dà a diveder chiaramente, ch' egli riconoſce per vero il ſuo aſſioma ancora in un altro ſenſo, cioè, che ſe una forza, per eſempio una corda elaſtica, ſia poſta in mezzo a due corpi, non ſolamente con preſſioni eguali li ſollecita, ma eziandio, qualor la forza entri in azione, l' azioni contrarie, eſercitate contro ai due corpi, ſono pur eſſe eguali, quando niun de' corpi altronde impedito ſia. Che tale ſia il ſentimento del Newton, laſciando l' eſempio del cavallo, che tira il cocchio, il quale intendere ſi potrebbe ancora nell' altro ſenſo, ſi prova chiaramente dall' eſempio d' un corpo, che urta in un altro, il quale ſoffre quella medeſima mutazione, che nell' altro produce, d' onde deduce, che a cotali azioni ſeguono eguali mutazioni, non di velocità, ma di moto, quando i corpi non ſieno altronde impediti; ed in queſto, ſembra, che pur l' intendano i dottiſſimi Padri le Seur,

e Jac-

e Jacquier, che hanno con somma dottrina, e chiarezza la newtoniana opera comentata. E voi, Signor Nestore, se vi porrete mente, vedrete, che poco dianzi, a confermare la riflessione, e l'argomento del Sig. Cesare, avete dato questo intelletto all'assioma.

N. Avete ragione, l'egualità delle sole pressioni non prova sicuramente, che le forze vive eguali, in egual tempo debbansi estinguere; ma è necessaria l'egualità dell'azioni contro all'uno, ed all'altro corpo; perciocchè le forze estinte devono esser proporzionali all'azioni, per cui s'estinguono.

L. Adunque l'assioma, preso in tal senso, non è certo, sicuro, e ricevuto concordemente da tutti, ma dubbioso, e suggetto alla controversia, e alla disputa, e da molti apertamente negato. E perchè veggiate dove precisamente stia posta la cagione del dubbio, prenderò la cosa nel caso più semplice, e che più si confà col nostro proposito. Considererò due corpi sforniti d'ogni velocità, e posti in mezzo ad una forza qualunque, per esempio ad una corda elastica. Tutti convengono, che l'elasticità, o la pressione all'un corpo, e all'altro applicata, sia la medesima; niun nega, che le velocità, in egual tempo prodotte, non sieno in ragion reciproca delle masse, e per conseguenza, che le quantità del movimento non sieno eguali. Tutti accordano, che gli spazj, in egual tempo passati, sono come le velocità, e per conseguenza, in ragion reciproca delle masse. Si ricerca, se poste le potenze eguali, l'azioni debbano misurarsi da' tempi, ovver dagli spazj. Se vaglia la prima misura, non v'ha dubbio, che l'azioni contra dell'un corpo, e dell'altro esercitate, non sieno eguali; ma se vaglia la seconda misura, dovendo essere in ragion degli spazj, saranno in ragion delle velocità, ovvero in ragion reciproca delle masse. E dopo aver io ne' dì passati assai chiaramente provato, che l'azione nella legge degli spazj vien contenuta, e per conseguenza alla potenza, ed allo spazio riesce proporzionale, resta ancora provato non esser vera l'egualità tra l'azione, e la reazione presa in tal senso. Niun vantaggio dunque nella materia presente potete ritrarre dall'assioma del Newton

C. Io non mi sono servito d'un tal assioma, ma d'altri più certi, ed inconcussi, e d'una metafisica evidenza forniti, ciò

cioè che di due forze eguali, niuna dee prevalere, di due ineguali, dee necessariamente prevaler la maggiore, a quali non potete porre eccezione.

L. Convien ora, che contro alla vostra ragione metta in buona luce la risposta del Sig. s'Gravesande, mostrando, che il fermarsi de' corpi, o il muoversi dopo l'urto, dipende unicamente dai tempi, in cui forman le contusioni, i quali, se eguali sieno, i corpi si fermeranno, se disuguali, si avrà dopo l'urto del movimento. A questo fine risovvengavi d'una proporzione, che si è per noi dimostrata ne' dì passati. Se tra due corpi sia costituita una serie d'elastri chiusi, i quali aprendosi, diano lor movimento, riceveranno nello stesso tempo velocità reciproche alle lor masse, e il punto C (*Fig.* 2) degli elastri, rispondente al centro delle masse, comune a' due corpi, sta per guisa in riposo, come se fosse fermamente inchiodato. Dalla qual riflessione abbiamo ricavato, che tutti gli elastri CA trasfondono l'energia dell'azione per loro esercitata nel corpo A, e tutti gli elastri CB nel corpo B; come seguirebbe, se nel punto C s'appoggiassero amendue le serie ad un ostacolo immobile. Quindi chiaramente si scuopre, che all'azione degli elastri CA unicamente s'oppone l'inerzia del corpo A, e agli elastri CB unicamente l'inerzia del corpo B, ed una serie non agisce contra dell'altra, restando unicamente equilibrate nel punto C, il quale si potrebbe inchiodare, senza che alcuna variazione seguisse. In questa dottrina, trovate voi cosa alcuna da opporre?

C. Proseguite il vostro ragionamento, perchè non veggio, siccome questa dottrina s'applichi al caso nostro.

L. Prima d'applicarla, che non sarà difficile, fa di mestieri premettere un'altra riflessione. Nella sentenza, ch'abbiamo ne' dì passati provata, le azioni sono, come le lunghezze CA, CB, perchè le elasticità per l'una parte, e per l'altra sono eguali; dunque riescono in ragion reciproca delle masse. E ciò parmi venir dalla ragion fisica comprovato; perchè poste disuguali le masse, sono similmente disuguali le inerzie; dunque l'intera serie degli elastri AB è applicata dall'una parte, e dall'altra a vincere ineguali resistenze d'inerzia. E non è egli convenientissimo, ch'ivi più gagliarda l'azion si porti, ove la resistenza è minore, ed ivi più debile, ove è

maggiore? intanto che se A fosse infinitamente picciolo, ovvero se B fosse infinitamente grande, tutta l'azione s'eserciterebbe contra del corpo A; dunque l'intera azione di tutti quanti gli elastri si dee divider per guisa, che stia in ragion reciproca delle resistenze dell'inerzie, ovver delle masse.

C. Sono come un viaggiatore, che in oscura, e nuvolosa notte suo cammino facendo, incomincia a discuoprire un debil lume dell'aurora, che appena spunta. So, che i cartesiani non riceveranno così fatta inegualità di forze; ma per dimenticarci delle verità da voi dimostrate, nel rispondere ad una obbjezione, avete diritto di suppor i principj leibniziani; perciocchè supposti i principj loro, avete obbligo di mostrare, che niun inconveniente debba seguire. Venite omai all'applicazione, perchè così fatta tesi mi tien in pena.

L. V'ubbidisco. Supponete, che i due corpi con quelle velocità, che hanno dagli elastri ricevute, rivoltando corso, e direzione, ritornino a chiuder gli stessi elastri; cosa manifesta è, che con quel medesimo passo, con che si sono aperti, si chiuderanno; dunque, fermo, ed immobile rimanendo il punto C, si ridurranno gli elastri allo stato, in cui si trovavano prima di aprirsi, e nello stesso tempo si chiuderà tanto la serie CA, quanto la CB, e lo stesso seguirà per l'appunto, come se il punto C fosse immobilmente inchiodato; dunque tutta la forza del corpo A s'impiega a chiuder gli elastri CA, quella del corpo B, gli elastri CB. Adunque si danno due azioni, l'una del corpo A, che chiude gli elastri CA, e l'altra del corpo B, che chiude gli elastri CB, le quali compiendosi, nel medesimo tempo, i corpi si trovano ad uno stesso punto ridotti alla quiete. Ne le due serie degli elastri CA, CB agiscono punto l'una contra dell'altra, se non che si sostengono in equilibrio nel punto C.

Or il caso addotto, altro non è, se non se il caso di due corpi, che con velocità reciproche alle masse loro, vengono all'urto per mezzo d'una serie d'elastri, che cominciano a comprimere amendue nel medesimo tempo; nel qual urto, amendue i corpi perdono nello stesso tempo ogni movimento, facendo ciascuno l'azione sua contro ad elastri, il cui numero è in ragion reciproca delle masse.

C. Tra il vostro caso, e quello de' corpi, che vengono all'

all'urto, vi discuopro qualche differenza notabile; perchè nel vostro caso i corpi vengono a chiudere una serie d'elastri, che stanno in quiete, laddove nell'altro caso i corpi portano con seco quelle parti, che si hanno a comprimere, le quali però dotate sono delle celerità de' medesimi corpi.

L. Ma non vedete, che i principj, onde mi combattete, quando fossero ben applicati, proverebbero egualmente contro al caso addotto da me. Perchè se è vero, che di due forze ineguali, la maggiore sempre dee prevalere, e formar la contusione in più lungo tempo, e che solamente due forze eguali devono contrabilanciarsi, e le contusioni in egual tempo formare, ne seguirebbe per deduzion necessaria, che nel caso nostro, in cui i corpi con velocità reciproche vengono a stringer gli elastri, dovrebbero chiuderne in egual tempo un numero eguale, e il centro delle masse non resterebbe immobile, lo che contraria alla dimostrazione fatta ne' dì passati. Per altro il voler metter a computo le parti, le quali son suggette a costipazione, mi sembra molto difficile; perocchè v' intervengono infinite, per così dire, azioni, e reazioni, le quali non veggio, con che metodo si possano maneggiare.

C Per quanto la vostra risposta corrobori non poco la riflessione del Sig. s' Gravesande, pure sembrami ancora strano, che due corpi dotati di forze ineguali si possano, terminato l'urto, e l'azione, ridurre alla quiete.

L. Non è egli evidente, che, quando corpi dotati di velocità compite hanno quelle contusioni, che son valevoli di formare, devonsi rimanere in quiete? Non ho io dimostrato, che amendue i corpi, i quali vengono all'urto con velocità reciproche delle masse, formano in tempi eguali le contusioni? dunque nel medesimo stante d'ogni velocità spogliati si trovano, e per conseguenza amendue dopo l'urto debbon fermarsi. Vedete pertanto esser vero ciò, che lo s' Gravesande ha avanzato, cioè che i corpi urtanti, le cui quantità del movimento sieno eguali, e contrarie, si fermano, non perchè eguali sieno le forze, ma perchè amendue si consumano nel formare la contusione. La qual risposta il dotto suo autore si è studiato di confermare con parecchie sperienze, eseguite colla sua solita diligenza.

N. Prima, che si espongano le sperienze dello s' Gravesande, io voglio, con vostra licenza, dir due parole intorno

ai principj, che fanno la base del discorso del Sig. Cesare, cioè che due forze eguali sempre si contrabilanciano, e che di due forze ineguali, sempre la maggiore prevale. Domando io dove è fondata l'evidenza di tai principj? Certamente non in altro, se non se nel principio dell'indifferenza, e della ragion sufficiente; perciocchè non essendovi maggior ragione, che piuttosto l'una delle eguali, che l'altra forza prevalga, farà di mestieri, che vicendevolmente sostenganfi, e perciò s una d'esse alcun poco s'accrescerà, dovrà per necessità prevalere. Dunque, dich'io, per ben applicare, Sig. Cesare, i vostri principj, fa di mestieri, che tutte l'altre cose sien pari, perchè essendovi qualche diversità, in questa potrà fondarsi forse la ragion sufficiente, perchè l'una, piuttosto, che l'altra prevalga. Dichiariamoci coll'esempio delle forze morte. Certamente se due forze morte saranno l'una contro all'altra applicate, vicendevolmente in equilibrio si sosterranno, perchè essendo tutte le cose pari, non v'ha maggior ragione per l'una parte, che per l'altra. Ma se applicherò due forze eguali alle braccia disuguali d'una stadera romana, varrà forse il principio, ch' esse in equilibrio a cagion dell'egualità si sostengono? Mainò; perchè nella disuguaglianza delle braccia può esser fondata la ragion sufficiente, onde piuttosto l'una, che l'altra abbia a prevalere.

Entriamo al presente a parlare del caso, di cui si tratta. Non v'ha dubbio alcuno, che se due corpi eguali, con eguali velocità vengano all'urto, non debbano, compito l'urto, fermarsi; perchè essendo eguali i corpi, eguali le forze loro, eguali le contusioni, eguali i tempi, in cui formansi, non v'ha maggior ragione, che il moto dopo l'urto segua piuttosto una direzion, che l'opposita. Ma se in corpi disuguali abbianvi forze eguali, non solamente i corpi, ma ancor le contusioni, ed i tempi, in cui formansi, son disuguali; dunque in alcuna di queste disuguaglianze può esser fondata la ragion sufficiente, perchè il moto, dopo l'urto, segua piuttosto la direzione del corpo A, che del corpo B; la qual ragion sufficiente può mantenersi non di rado, anche quando nel corpo A risiegga la minor forza. Il Sig. Lelio non ha fatto altro fin ora, che dimostrare, che la ragion sufficiente si fonda nelle disuguaglianze de' tempi, in cui si forman le contusioni. Laonde i vostri principj,

cipj,

cipj, Sig. Cesare, applicati al caso, ch' abbiam per le mani, non provan nulla, perchè non sono rettamente applicati. Perdonate se v'ho interrotto. Esponete al presente gli sperimenti dello s' Gravesande.

L. Sarà bene vederne alcuno, perchè vi fermiate ben nella mente, che la contusione de' corpi, i quali venendo all'urto si fermano, sarà squisitamente eguale a quelle due, che separatamente farebbero; dopo di che non avrete pena a riconoscer per vera la mia dottrina. I cilindri D, F (*Fig.* 1) sono corpi solidi, G è un cilindro cavo, che si riempie d'argilla molle, e bagnata. D, G hanno un medesimo peso, ed il peso del cilindro F è doppio di ciascheduno di loro. Nella nota macchina delle percussioni si fanno venir all'urto con moti contrarj, F con velocità = 5, G con velocità = 10. Compiuta l'azione, i corpi si fermano, e formasi nella creta la cavità segnata in V. Concepite la cassetta N fermata immobilmente nel muro, che sia riempiuta della medesima creta bagnata, ed in lei urti il corpo F colla velocità, che avea prima, e si formerà la cavità S. Acconciata di nuovo l'argilla, si lasci cadere in essa il corpo D, che eguaglia in peso il corpo G per modo, che urti con quella velocità, di che è stato G primamente dotato; si formerà la cavità T. Misurate dallo sperimentatore le fosse formate, ha trovato, che le fosse S, T, V sono come 1, 2, 3. Dalla quale sperienza palesemente ricavasi, che i corpi, i quali vengono all'urto, formano una contusione eguale a quelle due, che separatamente farebbero. Si fermano dunque i corpi, perchè nel medesimo tempo le forze, comunque inegnali, compiono quelle contusioni proporzionali, che son valevoli di formare. Potrete leggere, se vi piace, gli sperimenti seguenti, i quali comprovano la stessa verità; giacchè il descriverli tutti ci porterebbe troppo lontani.

N. In somma io veggio chiarissimo, che il fermarsi, o il muoversi de' corpi dopo la percossa, non dipenda dalla proporzione, che passa tra le forze, di cui sono animati, ma tra i tempi, in cui queste forze si consumano nel produr gli effetti di costipazione. Se amendue si consumano nel medesimo tempo, i corpi rimarran fermi appresso l'urto; ma se una abbisogna di più tempo, che l'altra, quella non si spenderà tutta nella contusione, la quale interamente compita, la forza residua,

dua, che rimarrà viva ne' due corpi, dirigeralli per quella parte, ove era diretto il corpo, in cui risedeva. E siccome può avvenire, che una forza minore abbia ad impiegare più tempo, che una maggiore, così non è maraviglia, che il moto alcune fiate segua la direzione della forza minore.

L. Cotal conseguenza ricavasi ad evidenza dal caso, che abbiamo fin ora considerato. Sieno, come sopra, i due corpi A, B, che vengano a chiudere una serie d'elastri con velocità reciprocamente proporzionali alle masse. Per accrescere la quantità del moto nel corpo B, fa di mestieri, che si accresca o la sua velocità, o la sua massa, o l'una, e l'altra. In tutti questi casi dee succedere, ch'egli abbisogni di più lungo tempo a perdere la sua forza; perciocchè lo stesso corpo, quanto ha più di velocità, ovvero posta la stessa velocità, un corpo quanto è maggiore, in tanto maggior tempo perde il suo movimento, purchè gli si opponga la stessa forza morta: molto più se fosse maggiore non men la massa, che la velocità; dunque qualunque volta si accresca la quantità di movimento nel corpo B, egli dovrà perder il suo movimento in più lungo tempo di prima, vincendo la stessa elasticità; ma prima lo perdeva nel medesimo tempo, che il corpo A; dunque dopo l'accrescimento lo perderà in tempo più lungo; e per conseguenza quando la forza A sarà estinta, fatta la contusione, parte ne rimarrà viva ancora nel corpo B, la quale obbligherà i corpi dopo l'urto a camminare secondo la sua direzione. E questo discorso vale, ancorchè la forza B restasse con tutto l'accrescimento minore di quella del corpo A.

C. Questo è un troncar il nodo, non isciorlo. Vorrei, che divisaste con minutezza, siccome facciasi dalla natura la distribuzion delle forze, ove le velocità non serbano delle masse la ragion inversa.

L. Gran peso m'appoggiate sopra le spalle, e maggiore forse di quello, che forse v'immaginate. Non potete credere quanti pensieri, e studj mi sia costato il metter in chiaro un tal punto; pure non sembrami al fine d'esservi malamente riuscito. Ma permettetemi, che io tratti prima del caso, in cui le velocità sono in ragion reciproca delle masse, perchè il metodo, che userò, darà maggior chiarezza agli altri due casi, cioè quando l'elastro è posto in mezzo a due corpi dotati di velo-

velocità opposite, e quando è posto in mezzo a due corpi dotati di velocità cospiranti.

C. Come vi piace.

L. Sieno (*Fig.* 2) due corpi A, B, i quali stringano ad un tempo una serie d'elastri A B con velocità, le quali sieno in ragion reciproca delle masse. Si prendano gli elementi A *a*, B *b* in ragione delle velocità: egli è chiaro in primo luogo, che gli elementi A *a*, B *b* verranno passati nel medesimo tempo; perciocchè i tempicelli sono in ragion composita degli elementi A *a*, B *b*, e reciproca delle velocità; ma gli elementi A *a*, B *b* sono, come le velocità; dunque i predetti tempicelli saranno in ragion composita diretta delle velocità, e reciproca delle stesse velocità; ma questa è ragione d'egualità; dunque i predetti tempicelli, onde si scorrono gli spazietti A *a*, B *b*, sono eguali.

Quindi si divida la serie A B in C per modo, che sia A C a B C in ragion diretta delle velocità, cioè in ragion reciproca delle masse, onde C sia il centro delle medesime masse; e cotal punto s'intenda con un chiodo immobilmente fermato. Egli è manifesto, che passandosi anche in questo caso gli spazietti A *a*, B *b* nello stesso tempo, giunti che sieno i corpi in *a*, *b*, ciascun degli elastri delle due serie si ritroverà egualmente chiuso; perchè essendo A *a* : B *b* : : A C : B C, se le due costipazioni A *a*, B *b* si distribuiscano per gli elastri delle due serie A C, B C, ne toccherà una egual parte a ciascuno; dunque il chiodo C si troverà sempremai posto in mezzo a due elastri chiusi, e costipati egualmente, e per conseguenza in mezzo a due forze eguali, e contrarie; onde levato anche il chiodo C, il punto C si manterrà in equilibrio, ed immobile. Quindi deducesi, che tutta l'azione degli elastri C A s'impiega a cangiar lo stato del corpo A, siccome tutta l'azione degli elastri C B s'adopera a mutar lo stato del corpo B.

Questo è il caso privilegiato; perciocchè giunti i corpi in *a*, *b* si trovano aver, come prima, velocità, che sono in ragion reciproca delle masse. Perciocchè eguali quelle potenze, che sono applicate ai due corpi, ed eguali i tempi, in cui si scorrono A *a*, B *b*, le velocità perdute saranno in ragion reciproca delle masse; ma ancora le primitive erano nella stessa data ragione; dunque le residue eziandio saranno in ragion reci-

pro-

proca delle maſſe. Quindi ripetendoſi la ſteſſa ragione per li ſucceſſivi elementi, ſi ritroverà, che il punto C ſarà ſempre in equilibrio, ed immobile, che i corpi perderanno nello ſteſſo tempo il lor movimento, che l'azione degli elaſtri CA, ſarà ſempre rivolta contra del corpo A, e l'azione degli elaſtri CB contra del corpo B, e che per conſeguenza la forza del corpo A s'impiegherà a chiuder gli elaſtri CA, e quella del corpo B gli elaſtri CB.

N. Comunque tutte queſte verità per altro metodo fuſſero riſchiarate; pure il preſente, dirò così, più immediato, e più proſſimo m'è piacciuto; e veggio, come per barlume, ch'egli può eſſer di buon uſo ancora negli altri caſi.

L. Vengo al ſecondo caſo, in cui corpi dotati di velocità contrarie, non reciprocamente proporzionali alle maſſe, vengono a chiudere una ſerie d'elaſtri. I due corpi A, B (*Fig.* 3) ſi adoprino a ſtringer la ſerie AB, e ſia la velocità del corpo B alla velocità del corpo A in maggior ragione, che la reciproca delle maſſe. Si prendano gli elementi A*a*, B*b* in ragione delle velocità; chiara coſa è, pel diſcorſo fatto nel primo caſo, che gli ſpazietti A*a*, B*b* nello ſteſſo tempo ſi paſſeranno.

Sia C il centro delle maſſe, e s'intenda queſto fermato per un momento con un chiodo; dico, che mentre i corpi ſi muovono per A*a*, B*b*, ciaſcun degli elaſtri reſterà più compreſſo nella ſerie CB, meno nella ſerie CA. Perciocchè eſſendo la velocità di B alla velocità di A, o ſia B*b* : A*a* in maggior ragione della reciproca delle maſſe, ſarà ancora in maggior ragione di CB : CA; dunque diſtribuendo la compreſſione B*b* negli elaſtri CB, e la A*a* negli elaſtri CA, a ciaſcun degli elaſtri CB toccherà qualche coſa di più, che a ciaſcun degli elaſtri CA; dunque il chiodo ſarà poſto in mezzo a due forze diſuguali. Finchè vi ha il chiodo, è manifeſto, che tutti gli elaſtri CB ſi eſercitano contro a B, e gli elaſtri CA contro ad A, e per conſeguenza la forza di B s'impiega a ſerrar gli elaſtri CB, e la forza di A a ſerrar gli elaſtri CA. Ma rimoſſo il chiodo, gli elaſtri BC più chiuſi, ſi apriranno, ſtringendo gli elaſtri CA; dunque non ſolamente la coſtipazion degli elaſtri CB, ma parte ancora di quella degli elaſtri CA, ſi deve alla forza del corpo B, rimanendo l'altra parte prodotta

dalla

dalla forza del corpo A. Tutto ciò comunque nello stesso tempo si compia, pure non lascia d'esser verissimo.

Ma fa di mestieri determinar più particolarmente la quantità dell' azioni, esercitate contra de' due corpi, e di quanti elastri la costipazione debbasi al corpo B, di quanti al corpo A. Si divida la A B nel punto H in ragion diretta delle velocità, e s'intenda il punto H con un chiodo fermato. Finattantochè i corpi A, B scorrono gl'infinitesimi spazietti A*a*, B*b*, le velocità si possono considerare come costanti; dunque essendo A*a* : B*b* : : AH : BH, se le due costipazioni A*a*, B*b* si distribuiscano agli elastri AH, BH, un'egual parte a ciascuno ne toccherà; dunque il chiodo posto in H si ritroverà in mezzo a due forze eguali, e contrarie; dunque ancor senza il chiodo, il punto H negli elastri si manterrà fermo, ed immobile; e per conseguenza gli elastri HA eserciteranno l' azione contro al corpo A, e la costipazion loro attribuir si dovrà alla forza impiegata dal corpo A; siccome l'azione degli elastri H B si adoprerà contro al corpo B, e si vorrà attribuire la costipazion loro alla forza impiegata dal corpo B. Quindi raccolgasi, che ottimamente s'esprime l'azione esercitata dalla serie contro al corpo A per $f.\,Aa$, dinotando f l'elasticità; siccome l'esercitata contra di B s'esprime per $f.\,Bb$, e l'azione da tutta la serie esercitata, sarà espressa per $f.\,\overline{Aa+Bb}$; essendo l'azione proporzionale all'elasticità, e al numero degli elastri, egualmente costipati, a cui sono li predetti elementi proporzionali. Onde le forze perdute s'esprimeranno per $-AVdV$, $-Budu$, chiamata la velocità del corpo $A=V$, quella del corpo $B=u$.

Ma si avverta, che il punto H non sarà costante, ma variabile; perciocchè le velocità perdute da' corpi B, A sono in ragion reciproca delle masse; ma la velocità del corpo B a quella del corpo A supponesi in maggior ragione, che la reciproca delle masse; dunque le velocità residue ne' punti *b*, *a* in molto maggior ragione, che la reciproca delle masse; dunque le velocità in *b*, *a* in maggior ragione, che le velocità in B, A, e per conseguenza, che BH : AH, ovvero che *b*H : *a*H; dunque divisa *ba* in ragion delle velocità, che sono in *b*, *a*, il punto di divisione caderà tra i punti H, *a*.

Abbastanza è palese la distribuzion delle forze in questo secondo caso, in cui con velocità contrarie i due corpi s' impie-

piegano a chiudere una ferie d'elaftri. Mi ha dato molto che penfare il terzo cafo, in cui due corpi dotati di velocità cofpiranti s' adoprano a chiuder la fteffa ferie d' elaftri. Sieno (*Fig.* 4), come fopra, due corpi A, B, che tengano in mezzo la ferie AB, e viaggino verfo la parte H amendue, B con velocità maggiore, A con minore. Se fi ferma il centro delle maffe C con un chiodo, e fi concepifca la ferie AB fuggetta ad una qualche previa coftipazione, chiara cofa è, che gli elaftri CB fi chiuderanno, eftinguendo della forza nel corpo B, ma gli elaftri CA s'apriranno, accrefcendo la forza del corpo A: gli fpazietti poi B*b*, A*a*, i quali faranno nello fteffo tempo dalle due maffe paffati, ferberanno la proporzion delle velocità. Levato il chiodo, fi chiuderanno vie più di quel che erano prima gli elaftri CA, mettendofi in equilibrio cogli elaftri CB. Quì bifogna diligentemente avvertire, che fi efercitano dalla ferie degli elaftri due azioni contrarie, una di coftipazione, che diminuifce la forza del corpo B, l'altra di reftituzione, che accrefce la forza nel corpo A. Se il punto A ftato foffe immobile, alla forza del corpo B fi dovrebbe tutta la coftipazione B*b*; ma dilatandofi la punta A, fi diminuifce la coftipazione, la qual vien ad effere $Bb - Aa$; perciò al corpo B fi deve una coftipazione maggiore di quella, che nella ferie ritrovafi, ricevendo il corpo A nuova forza dalla dilatazione. Sicchè l'azione efercitata contra del corpo B è $= f.\, Bb$, e la forza da lui perduta $= -\, Budu$; l'azione contra del corpo $A = f.\, Aa$, e la forza per lui acquiftata $= AVdV$. Quindi fottraendo un' azione dall'altra, rimarrà l'azione corrifpondente alla refidua coftipazion della ferie, cioè $f.\, \overline{Bb - Aa} = -\, AVdV - Budu$. Laonde fi fcorge effer quefta una formula generale, che può effer d'ufo, quando fia nota la coftipazion della ferie.

Per meglio dichiarar quefta cofa, prendo il punto H per modo, che BH : AH fia, come la velocità di B alla velocità di A, e intendo prodotta la ferie BA fino in H, e l'applico al folo corpo B, fermandola in H con un chiodo; indi lego al corpo A, ed al chiodo H una corda elaftica, la quale fa forza per accorciarfi. Suppofte le velocità, come prima, è chiaro, che il corpo B chiuderà tutti gli elaftri BH, paffando lo fpazio B*b*, e in chiudendoli, perderà parte della fua forza.

All'

All'oppofito, la corda H A, contraendofi, accrefcerà la forza del corpo A; ma l'azione di contrazione della corda H A è eguale, e contraria all'azione di coftipazione degli elaftri H A; dunque la forza perduta dal corpo B è eguale sì a quella, che è neceffaria a chiuder gli elaftri A B, sì a quella, che s'acquifta novellamente dal corpo A. Le fteffe azioni contrarie per l'appunto feguono, quando i due corpi fieno immediatamente applicati alla ferie A B, rimoffa tanto la ferie H A, quanto la corda H A, che efercitano azioni eguali, e contrarie; perchè la ferie A B, aprendofi, per l'una parte efercita un' azione eguale a quella della corda H A, e chiudendofi, per l'altra efercita un'azione eguale all'efercitata dalla ferie H B; dunque la forza perduta dal corpo B, deve eguagliar quella, la quale fa la coftipazion degli elaftri A B, la qual coftipazione $= Bb - Aa$, ed infieme quella, la quale novellamente fi trasfonde nel corpo A.

Quì pure fi deve brevemente avvertire, che la velocità del corpo A fempre fi accrefce, e la velocità del corpo B fempre fi diminuifce; onde è manifefto, che le velocità devonfi all'eguaglianza ridurre; alla quale, quando faranno arrivate, compiuta farà la coftipazion degli elaftri.

N. Il cafo, in cui i corpi fono dotati di velocità cofpiranti merita maggior confiderazione, che quello, ove hanno velocità contrarie; perchè in quefto gli elaftri, da amendue le parti chiudendofi, non efercitano altra azione, che di coftipazione, e l'intera azione di coftipazione è eguale alla fomma delle mutazioni di ftato, o delle forze vive perdute. Ma nel cafo, ove le velocità fon cofpiranti, fi efercitano dagli fteffi elaftri due azioni contrarie per l'una parte di coftipazione, per l'altra di reftituzione; delle quali azioni l'una diftruggendo parte di quella coftipazione, che l'altra produce, alla coftipazione refidua non deve effer eguale la fomma delle due mutazioni di ftato prodotte ne' corpi, cioè la fomma delle forze vive, che l'un corpo perde, l'altro acquifta; anzi la coftipazione refidua, corrifpondendo alla differenza delle due azioni, ne feguita, ch'ella dovrà effer eguale alla differenza tra la forza perduta da un corpo, e la forza acquiftata dall' altro, ficcome avete fatto vedere. Per avere poi la mifura dell'azione efercitata contro ad un corpo, bafta prender il ret-

tangolo della forza elastica, e della minima costipazione, o restituzione, che segua da quella parte. Se voglionsi poi i due corpi insieme considerare, e misurar nell'uno, e nell'altro unitamente la mutazion di stato, che segue, colla costipazione negli elastri residua: allora fa di mestieri considerare, se da amendue le parti si chiudano, ovvero se da una parte si chiudano, e s'apran dall'altra. Nel primo caso sarà di mestieri la somma prendere delle due forze perdute; nel secondo sottrar la forza acquistata dall'un corpo dalla forza perduta dall'altro. Ma usando delle velocità positive, e negative, e chiamando $= dx$ la costipazione, che nella serie degli elastri rimane, varrà sempre la formula $fdx = - AVdV - Budu$. Perciocchè se i corpi si vengono incontro, posta u positiva, la perduta si dovrà esprimer per $- du$; onde la forza perduta dal corpo B sarà $= - Budu$; all'opposito il corpo A è dotato della velocità $- V$, onde la velocità perduta sarà $+ dV$, e la forza perduta dal corpo $A = - AVdV$; quindi la somma delle forze perdute sarà $= - AVdV - Budu$. Se poi son forniti i corpi di velocità cospiranti, non meno u, che V, sarà positiva; ma la velocità perduta dal corpo B, sarà $- du$, l'acquistata dal corpo A sarà $+ dV$; dunque la forza perduta dal corpo $B = - Budu$, l'acquistata dal corpo $A = + AVdV$; delle quali forze prendendo la differenza, avremo $- AVdV - Budu$; ma nel primo caso fdx dee eguagliar la somma delle forze perdute, nel secondo dev'eguagliar la differenza tra la forza perduta da un corpo, e l'acquistata dall'altro; dunque dee sempre aver luogo l'equazione $fdx = - AVdV - Budu$.

L. Quindi ricavate, che nel secondo caso, essendo la forza perduta nel corpo B eguale a quella, che è necessaria a produr la costipazione, che negli elastri si vede, e a quella, che s'acquista dal corpo A, posso, e debbo supporre, che quella forza, che perdesi nel corpo B, e non corrisponde alla costipazion presente degli elastri, passi, e s'infinui nel corpo A.

N. Così è: e quantunque sia persuaso, che cotal ricerca non vi sia costata poca fatica; pure io veggio l'economia, e la distribuzion delle forze così limpida, e chiara, che l'opposizion cartesiana, che prima mi parea forte, niente mi muove presentemente. Abbiamo considerati due corpi, che chiudono una

una ferie d'elaftri. Non credo fia d'uopo confiderare il cafo, quando una ferie d'elaftri, pofta in mezzo a corpi dotati di qualfivoglia velocità, fi va aprendo; perchè la teoria è onninamente la fteffa.

L. No: farà bene, che ne diciam due parole, perchè con ciò ci apriremo la ftrada ad ifciogliere un ingegnofo argomento de' Signori Mac-Laurin, e Jurin, in favore della vecchia opinione. Però breviffimamente vi prego a divifarne l'economia.

N. Se i corpi fono dotati di velocità contrarie, allora la ferie degli elaftri, che fi reftituifcono, efercita per l'una parte, e per l'altra due azioni di reftituzione, ciafcuna delle quali accrefce forza al corpo, in cui agifce; ma fe i corpi dotati fono di velocità cofpiranti, allora s'efercitano due azioni, l'una di coftipazione, l'altra di reftituzione; quefta accrefce, quella toglie forza al corpo, a cui è applicata; onde la differenza delle forze perduta, ed acquiftata, farà eguale alla differenza di tali azioni. Ma fe vogliamo dalla reftituzion, che fi vede nella ferie degli elaftri, le proprietà del movimento indagare, varrà fempre la fteffa formula $f dx = AVdV + Budu$.

L. Così è: ne la cofa ha bifogno di maggior dichiarazione, perchè ciò, ch'abbiam detto, abbondantemente la prova. Dunque nel fecondo cafo, la differenza delle due azioni eguaglia la differenza della forza dall'un corpo acquiftata, e perduta dall'altro; dunque l'azion, che corrifponde all'efpanfion degli elaftri, la qual fi vede, dev'eguagliare la differenza della forza acquiftata, e perduta; dunque la predetta azion degli elaftri, infieme colla forza perduta da un corpo, dev'eguagliare la forza acquiftata dall'altro. Premeffa cotal conclufione, la qual nafce dall'egualità, che dee paffare tra le azioni, e le mutazioni di ftato, o gli acquifti, e le perdite delle forze vive, entriamo a difcutere l'argomento del Mac-Laurin, e del Jurin, dedotto dal moto translato, che a mio credere è il più ingegnofo, e il più forte di quanti fono ftati prodotti in favore della vecchia opinione. Voi, Sig. Cefare, che l'avrete a memoria, fiete in iftato di dargli tutta quella forza, di che è capevole.

C. Premettiamo, a chiara intelligenza, due principj, i quali non credo, che poffano effere da perfona alcuna in dubbio

bio chiamati. Certa cosa è, e la sperienza parimente il dimostra, che un uomo posto dentro d'una barca dee fare lo stesso sforzo a comunicare ad un corpo un grado di velocità o la barca stia ferma, o si muova con qualunque prestezza. Di più presuppongasi, che, a comunicare al corpo A un grado di velocità, si richieda un grado di forza. Ciò posto,

S'intenda la barca viaggiare con un grado di velocità, ed insieme con lei il corpo A. Qualunque siasi la forza, che s'è impiegata a comunicare il moto alla barca, egli è certo per lo secondo principio, che un grado solo se n'è impiegato a comunicare la velocità d'un grado al corpo A. Al presente al corpo A s'applichi un uomo, il quale per lo primo principio dee fare lo stesso sforzo a comunicargli un grado di velocità, come se la nave ferma, ed immobile riposasse; ma stando ferma la barca, si richiede la forza d'un grado; dunque ancor essendo in moto la barca; ma il corpo A cammina con due gradi di velocità, perchè uno l'ha comun colla barca, l'altro l'ha ricevuto dall'uomo; dunque due gradi di forza, e due di velocità; dunque la forza corrisponde alla velocità, non al quadrato. Quel, che si è detto d'un uomo, dicasi ancor d'un elastro, e a disegno li nomino amendue, perchè il Mac-Lautin servesi dell'esempio dell'uomo, ed il Jurin dell'elastro.

N. L'argomento è sottile, e pieno d'ingegno, ed al mio intelletto fa forza grande. Son ansioso d'ascoltar la risposta. Non perdiam tempo.

L. A rispondere a così fatta sottilissima obbiezione, mi convien premettere alcune notizie, dipendenti dal sistema leibniziano. In primo luogo siavi una nave ferma con dentrovi un elastro chiuso, e costipato per maniera, che con una punta s'appoggi alla nave, coll'altra, appoggiandosi al corpo A, sia valevole di comunicargli un grado di velocità. Per amor di chiarezza, amo meglio di servirmi dell'esempio dell'elastro. Egli è manifesto, pei principj stabiliti, che l'elastro, agendo e per un verso, e per l'altro, comunicherà alla barca, e al corpo non meno velocità, che forze, le quali saranno in ragion reciproca delle masse. Però chiamando la velocità comunicata al corpo $= 1$, la sua massa $= m$, la massa della nave $= M$, la sua velocità $= x$, sarà $M : m :: 1 : x$; dunque $x = \frac{m}{M}$; e però

la for-

la forza comunicata al corpo $= \frac{m}{2}$, la comunicata alla nave $= \frac{M \cdot m^2}{2 \cdot M^2} = \frac{m^2}{2 \cdot M}$. Quindi l' intera energia, o sia l'azione efercitata dall' elaftro nel reftituirfi, farà $= \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2 \cdot M}$. Che fe M foffe infinita, $\frac{m^2}{2 M}$ farebbe nulla, onde l' intera azion dell' elaftro verrebbe ad effere $= \frac{m}{2}$.

Quefto accade, quando la barca fta ferma, ed immobile; ma fe prima, che l' elaftro fi fpanda, la barca foffe dotata della velocità $= 1$, tanto è lontano, che l' elaftro comunichi parte della fua energia alla nave, ch'anzi quefta parte perde di quella forza, onde è animata. Di quella parte d' azione, che prima nell' ipotefi della barca ferma efercitava l'elaftro contro alla nave, che fe ne fa al prefente? e quella forza, che la nave perde nell' efpanfion dell' elaftro, va ella in niente? Per le cofe poco anzi avvertite, e l' una, e l' altra devefi trasfonder nel corpo A. Laonde nello fteffo A fi trasfonderà tutta intera l'energia dell' elaftro, che abbiamo or or calcolata; di più quella forza, che la nave perde, che fa di meftieri di ritrovare col computo. La velocità perduta dalla barca dee effere alla velocità $= 1$, che è l' acquiftata dal corpo in ragion reciproca delle maffe, cioè come $m : M$; dunque la velocità perduta dalla nave è $= \frac{m}{M}$. Prima dell' efpanfion dell' elaftro, la barca era fornita della velocità $= 1$; dopo l' efpanfione, le refta la velocità $= 1 - \frac{m}{M}$; dunque la forza innanzi l' efpanfione era $= \frac{M}{2}$, dopo l' efpanfione le refta la forza $= \frac{M}{2} - \frac{2m}{2} + \frac{m^2}{2 \cdot M}$; dunque la perduta $= \frac{M}{2} - \frac{M}{2} + \frac{2m}{2} - \frac{m^2}{2 \cdot M} = \frac{2m}{2} - \frac{m^2}{2 M}$; ma l' intera energia dell' elaftro fi è ritrovata $= \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2 M}$; dunque la fomma di amendue farà $= \frac{3m}{2}$, la quale è tripla della forza $\frac{m}{2}$, colla quale fi è comunicato il primo gra-

grado di velocità. Questa è tutta la forza, che di nuovo si trasfonde nel corpo m, la quale aggiunta a quella, che aveva, cioè a dire ad $\frac{m}{2}$, avremo la forza totale $= \frac{4m}{2}$, che è appunto la metà del quadrato della velocità $= 2$, moltiplicata per la massa del corpo $= m$. Avvertasi, che se la forza della nave fosse infinita, la forza per essa perduta non sarebbe infinitesima, ma finita, ed $= \frac{2m}{2}$ la qual' aggiunta all' energia dell' elastro $= \frac{m}{2}$, darà, come sopra, una forza $= \frac{3m}{2}$.

Io ho parlato, servendomi dell' esempio portato da' celebrati autori dell' argomento; per altro non riesce più difficile il calcolo, quando si tratti la cosa universalmente. Veggiamolo, perchè vi rendiate certi, che la teoria conduce sempre a buon termine. Per le masse si ritengano le stesse denominazioni, e si chiami la velocità comune alla barca, e al corpo $= N$; quella, che il corpo acquista per l' espansion dell' elastro $= n$. Se la barca fosse immobile, ed $N = o$, l' elastro, dilatandosi, comunicherebbe, non meno al corpo, che alla barca, velocità, e forze, che sarebbero in ragion reciproca delle masse; dunque essendo $= n$ la velocità acquistata dal corpo, l' acquistata dalla barca, sarà $= \frac{mn}{M}$; dunque la forza acquistata in quest' ipotesi dalla barca sarà $= \frac{m^2 n^2}{2M}$, e l' acquistata dal corpo si ritroverà $= \frac{mn^2}{2}$; dunque l' intera energia dell' elastro, che eguaglia la somma di queste forze, sarà $= \frac{mn^2}{2} + \frac{m^2 n^2}{2M}$. Ritrovata per cotal maniera l'energia dell' elastro, cangiamo ipotesi, e supponghiamo, che la barca insieme, ed il corpo sieno animati dalla comune velocità $= N$. In quest' ipotesi la barca mossa per l' espansion dell' elastro perde la velocità $= \frac{mn}{M}$; dunque le rimane solamente la velocità $= N - \frac{mn}{M}$. La sua forza, prima dell' espansion dell' elastro,

ſtro, era $= \frac{MN^2}{2}$; appreſſo ſi trova eſſere $= \frac{M}{2} \cdot \overline{N - \frac{mn}{M}}^2$; dunque la forza perduta ſarà $= \frac{MN^2}{2} - \frac{M \cdot N^2}{2} + \frac{2mNn}{2} - \frac{m^2 n^2}{2M} = \frac{2mNn}{2} - \frac{m^2 n^2}{2 \cdot M}$. Queſta aggiunta all' energia dell' elaſtro, giacchè e l' una, e l' altra ſi trasfonde nel corpo novellamente, ſi trova eſſere $= \frac{mn^2}{2} + \frac{2mNn}{2}$; la quale aggiunta a quella, di che era fornito il corpo prima dell' eſpanſion dell' elaſtro, cioè alla forza $= \frac{mN^2}{2}$, darà la forza del corpo appreſſo l' eſpanſion dell' elaſtro $= \frac{mn^2}{2} + \frac{2mNn}{2} + \frac{mN^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \overline{n + N}^2$, cioè alla metà della maſſa moltiplicata nel quadrato della velocità, di cui il corpo è dotato.

Che ſe la nave ſi moveſſe in ſenſo contrario, onde per l'eſpanſion dell'elaſtro, non ſolo non perdeſſe velocità, e forza, ma anzi ne acquiſtaſſe della nuova, lo ſteſſo metodo ci condurrebbe allo ſteſſo termine. Non penſo di rifar il calcolo, ch' ognun di voi vede per ſe medeſimo.

Ho parlato in particolar dell' elaſtro, perchè m'è ſembrato, che la coſa doveſſe riuſcir più chiara. Per altro vuolſi ſimilmente ragionar dell' uomo, il quale ſi deve conſiderare ſiccome un elaſtro, che co' piedi s' appoggia, e punta contro alla nave, e colle mani agiſce contra del corpo.

C. A queſta voſtra dottrina, che per altro è ingegnoſa, e ſalva egregiamente tutti i fenomeni nell' opinione del Leibnizio, non trovo altro da opporre ſe non una coſa, che fa maſſima forza al mio intelletto. O la barca ſtia ferma, od ella ſi muova, l'uomo fa lo ſteſſo sforzo, e ſoffre la ſteſſa fatica, come la ſperienza dimoſtra. E come dunque può eſſere, che in una ipoteſi trasfonda nel corpo meno di forza, nell' altra più? A me ſembra chiariſſimo, che la forza nel corpo transfuſa debba eſſer proporzionale allo sforzo, ed alla fatica eſercitata dall' uomo. E quì io penſo, che fondi il Mac-Laurin la forza del ſuo argomento.

L. L' oppoſizione ha la ſua apparenza, e richiede, che il tutto ſi metta in chiaro con eſattezza. Convien diſtinguere tre generi di forza; la prima ſi è quella, che nell' una ipoteſi, e nell' altra ſi comunica dall' uomo al corpo A; la ſeconda è quella, che nell' ipoteſi della barca quieta traſfondeſi nella barca, e nell' ipoteſi della barca moſſa traſfondeſi nel corpo; l' ultima è quella, che viene nella ſeconda ipoteſi dalla nave perduta, e paſſa nel corpo. Le prime due richiedono ſforzo, e fatica nell' uomo. Ma la ſomma di queſte due è ſempre eguale nell' un caſo, e nell' altro, con queſto ſol di divario, che poſta quieta la barca, l' una paſſa nel corpo, l' altra nella nave, laddove poſta la barca in moto, amendue paſſano nel corpo. Ma queſto divario non fa, che ſi debba cangiar la fatica dall' uomo ſofferta in cotal' azione, non ſapendo egli a qual parte ſi ſpanda l' azion, che eſercita, dipendendo ciò dalle circoſtanze, che ſpeſſo all' uom ſono ignote.

Quanto all' ultima forza, la quale dalla nave paſſa nel corpo, non ſi richiede nell' uomo ſforzo, o fatica veruna, perchè egli altro non è, che un mero canale, per cui cotal forza a guiſa di lampo paſſa, fermandoſi poi interamente nel corpo. Perciocchè l' uomo nel traſfondere cotal forza non è coſtretto di gonfiar i ſuoi muſculi, che è l' unica cagione della fatica, e della ſtanchezza, ma toſto che la riceve, ad altrui la dona ſenza violenza. Quindi non è maraviglia, che, ſebbene nell' eſempio de' due ſcrittori ſi traſfonde nel corpo nella prima ipoteſi forza $= \frac{m}{2}$, nella ſeconda forza $= \frac{3m}{2}$, l' uomo e nell' un caſo, e nell' altro la ſteſſa fatica ſoſtenga, ed egualmente per la fatica ſi ſtanchi.

C. Queſta è la prima volta, che ho udito dar qualche ſoda riſpoſta a così fatto argomento, del quale veggio, dalla maniera del voſtro riſpondere, che voi pure fate gran conto. Perchè il dire, che il corpo A riceve dall' elaſtro, ovver dall' uomo un ſol grado di forza per riguardo alla barca, che già ſi muove, ma tre ne riceve per riguardo alla terra, ed ai corpi in eſſa quieſcenti, m' è ſempre paruta una miſera ritirata per non ceder alla forza dell' argomento.

N. In cotal guiſa riſpondeſi? E chi mai di cotal riſpoſta ſi ſerve?

C. Il

C. Il Sig. Riſtero negli atti di Lipſia del 1735. Oſſervate. Egli ſtabiliſce, che le forze non ſon di quel genere di quantità, che aſſolute ſi chiamano, ma di quelle, che ad altre ſi riferiſcono; e che perciò una medeſima forza, riferita a due corpi diverſi, può eſſere diverſiſſima: quindi non eſſere maraviglia, che nel caſo, di cui abbiamo parlato, la forza acquiſtata dal corpo A ſia come 1, riſpetto alla barca, come 3, riſpetto ai corpi, che ſono in terra.

N. Io veggio, che ciò è oppoſto al famoſo metodo del moto translato, di cui ſi è ſervito prima d'ogni altro l'Ugenio. E' paleſe, che un corpo, il qual ſi muova colla velocità = 1 dentro ad una barca, dotata della ſteſſa celerità, per riſpetto alla barca ſi muoverà colla celerità = 1, ma per riſpetto alla riva, colla velocità = 2. Il metodo, per far paſſaggio da uno all'altro rapporto, è di aggiungere la velocità della nave alla velocità, di cui per rapporto alla nave è dotato il corpo, ſe eſſe ſon coſpiranti, o di ſottrare l'una dall'altra, ſe ſon contrarie; e quella, che proverà, ſarà la velocità del corpo per rapporto alla riva. Quindi nel caſo addotto, aggiungendo la velocità = 1, che ha il corpo colla barca comune, all'altra, che è del corpo propria, avremo la velocità = 2, di che è dotato il corpo per rapporto alla terra. Che ſe un ſomigliante metodo dee valere per riguardo alle forze, aggiungendo quel, che il corpo ha di forza pel movimento proprio, a quello, che ha pel movimento comune, avremo 1 + 1 = 2, che è la concluſion del Mac-Laurin.

L. Le voſtre riflesſioni ſon molto a propoſito. La teoria del moto translato ha ſempre luogo, qualor ſi tratta di velocità, e di quantità di moto; perciò poſſiamo, a cagion d'eſempio, concepir due corpi, che agiſcono l'uno contra dell'altro, come ſpogliati d'ogni movimento comune, ed in queſta ipoteſi ſtabilir, come le velocità ſi modifichino, ed alle velocità ottenute per l'azione aggiungere, o dettrar quella, che avevano di comune, e il computo non potrà a meno di non eſſer eſattiſſimo. Ma quando ſi tratta di forze, non ſi può ſenza cautela ſervirſi di queſto metodo; perchè il medeſimo corpo dallo ſteſſo agente non riceve forza eguale in circoſtanze di quiete, e di movimento, ſiccome abbiamo fatto vedere. La cautela pertanto dev'eſſere di ſervirſi di queſto metodo in ordine alle velo-

locità, e trovate le velocità, passare alle forze; che così sfuggiremo il pericolo d'ogni paralogismo.

Egli è vero, che si può far uso d'un metodo geometrico, che alle occasioni è di moltissima utilità. Leviamo, o concediamo un movimento comune a que' corpi, che debbono insieme agire, e computando le forze, come se l'ipotesi fatta, fusse lo stato vero della natura, raccogliamo le forze dopo l'azione, dalle quali passiamo a ritrovar le celerità, che aggiunte, o sottratte dalla comune, daran le vere. Ma la quantità delle forze, di cui abbiam fatto uso, è puramente ipotetica; ma tale però, onde le vere velocità si raccolgono. Di questo metodo geometrico è necessario far uso, qualor c'è ignoto il movimento comune, perchè in tal caso fa di mestieri computarle, come se il movimento comune o non vi fusse, o fusse tanto, e niente più, mentre per altro non sappiamo, quanto egli sia. Concludiam dunque, che fa di mestieri, che li Signori Mac-Laurin, e Jurin, acciocchè l'argomento loro riesca trionfante, provino prima, che per riguardo alle forze, il metodo del moto translato, strettamente debba valere.

N. Tutto sembrami sufficientemente discusso, e ciò con molta efficacia, perchè ogni risposta è stata dedotta dalle leggi delle forze continuamente applicate; sicchè le leggi della comunicazione del movimento, non sembrano altro, che le stesse leggi delle forze continuamente applicate per alcune condizioni modificate. E non si potrebbe egli, Sig. Lelio, dalle leggi delle forze continuamente applicate dimostrar quelle della comunicazione geometricamente?

L. Senza alcuna difficoltà: anzi la dimostrazione è esposta al pubblico dal Sig. Leonardo Eulero, profondissimo geometra, nel quinto tomo degli atti di Pietroburgo. La vi esporrò, giacchè non è lunga, seguendo l'elegante metodo dell'Autore, e vedrete, che non solamente si determinano le velocità de' mobili, terminata l'azione di costipazione, e di restituzione, ma ancora nel mezzo di tali azioni, purchè, data la costipazione, si sappia la forza elastica.

Due corpi A, B, (*Fig.* 5) colle date velocità C, *c*, che suppongo cospiranti, incomincino a chiudere una serie d'elastri. Sieno giunti i corpi in A, B, e la serie sia ridotta alla lunghezza AB, e la sua costipazione, cioè la differenza tra la

natu-

natural lunghezza della ferie, e la lunghezza AB fi chiami $= x$; le velocità in A, B fi dicano V, u. Nel medefimo infinitefimo tempicello fi paffino da due corpi gli fpazietti Aa, Bb, riducendofi la ferie alla lunghezza ab; l'incremento della coftipazione farà $= dx = Aa - Bb$. Chiamiamo la forza elaftica $= f$. Avremo pertanto, fecondo le cofe fpiegate, la principal equazione $f dx = - AVdV - Budu$; dunque integrando per modo, che fia $S f dx = o$, quando $x = o$, fi avrà $S f dx = \frac{AC^2 - AV^2 + Bc^2 - Bu^2}{2}$. L'addizione della coftante fi determina per ciò, che fe $x = o$, debb'effere $V = C$, ed $u = c$. Di più fi avrà $f . Aa = - AVdV$, $f . Bb = Budu$; ma gli fpazietti Aa, Bb, fcorrendofi nel medefimo tempo, faranno, come le velocità V, u; dunque $Aa : Bb :: V : u$, e dividendo $Aa : Aa - Bb \; (= dx) :: V : V - u$; dunque $Aa = \frac{Vdx}{V - u}$. Di più $Aa - Bb \; (= dx) : Bb :: V - u : u$; dunque $Bb = \frac{udx}{V - u}$. I quai valori nell'ultime due formule furrogati danno $\frac{f . Vdx}{V - u} = - AVdV$, $\frac{f . udx}{V - u} = Budu$; dunque $\frac{fdx}{V - u} = - AdV$, $\frac{fdx}{V - u} = Bdu$; dunque $- AdV = Bdu$, e integrando colla neceffaria aggiunta delle coftanti, farà $AC - AV = Bu - Bc$.

Abbiamo dunque trovate due equazioni

(prima) $2 S f dx = A . \overline{C^2 - V^2} + B . \overline{c^2 - u^2}$

(feconda) $A . \overline{C - V} = B . \overline{u - c}$; dalle quali, qualunque volta f fia data per x, in qualunque coftipazion degli elaftri fi determina la velocità dell'uno, e dell'altro corpo.

Che fe cerchiamo le velocità, compiuta l'azione di coftipazione, o di reftituzione, così fi difcorra. Compiuta la reftituzione, farà $x = o$, e per confeguenza $S f dx = o$; dunque $A . \overline{C^2 - V^2} = B . \overline{u^2 - c^2}$. Si divida quefta per la feconda $A . \overline{C - V} = B . \overline{u - c}$, e proverrà $C + V = u + c$; dunque $u = C + V - c$; che pofto nell'equazione feconda, darà

A.

$A.\overline{C - V} = B.\overline{C + V - c - c}$; dunque $\frac{AC - BC + 2Bc}{A + B} = V$, che è la velocità dopo l'urto del corpo A, essendo i corpi perfettamente elastici. Similmente si troverà la velocità del corpo $B = u = \frac{Bc - Ac + 2AC}{A + B}$. Come si dovea ritrovare.

Compiuta poi l'azione di compressione, chi è che non veda, che la compressione $= x$ sarà la massima? dunque $dx = o$; dunque $Aa = Bb$; ma $Aa : Bb :: V : u$; dunque $V = u$; dunque della seconda equazione facendo uso, ritroveremo $V = \frac{AC + Bc}{A + B}$, la quale è la nota formula della comunicazione del moto per riguardo a' corpi perfettamente molli.

Ognun vede, che se fossero date le velocità de' due corpi, non quando gli elastri si ritrovano nella natural distensione, ma quando son suggetti ad una data costipazione, collo stesso metodo si ritroverebbe la velocità comune nel caso della massima costipazion degli elastri, le velocità de' due corpi, quando nella restituzione gli elastri son pervenuti alla data costipazione, anzi data per la costipazione la forza elastica le velocità in qualunque altra costipazione.

C. Questo è un molto bel ritrovato, di cui siamo debitori al dottissimo Sig. Eulero, per cui si fa manifesto, che la teoria della comunicazione del movimento è connessa in guisa colle leggi delle forze continuamente applicate, onde quella da queste con evidenza di conclusione si deduce. Contuttociò io osservo, che le velocita de' corpi A, B si ritrovano date per la costipazion degli elastri, non già per gli spazj, per cui essi viaggiano. Vi sarebbe metodo di sciogliere il seguente problema? Date le velocità di due corpi, essendo gli elastri nella sua natural distensione, determinare le velocità per gli spazj passati, ovvero determinar la curva, le cui abscisse sieno gli spazj passati dal mobile, e l'ordinate esprimano le velocità.

L. Il metodo non manca, ma è tale, onde difficilmente assegnar si possono le formule generali. Essendosi già trovato $Sfdx = AC^2 - AV^2 + Bc^2 - Bu^2$; di più essendosi ritrovata u data per V, sarà $Sfdx$ data per V; ma f si suppone data per x; dunque non meno x, che f è data per V. Per-

ciò

ciò chiamata $Aa = ds$, onde la specie s indichi lo spazio passato, avremo la formula $fds = - AVdV$, e dividendo per f, sarà $ds = -\frac{AVdV}{f}$, nella quale essendo f data per V, le incognite si ritrovano separate.

Ma sarà bene dar lume al metodo con un qualche esempio. S'intenda esser $f = Nx$, in cui N è una qualunque costante. Sarà pertanto $Nxdx = - AVdV - Budu$, e fatta l'integrazione $Nx^2 = AC^2 - AV^2 + Bc^2 - Bu^2$. Ma si è dimostrato essere $\frac{A}{B} \cdot \overline{C - V} = u - c$; dunque si avrà ancora $\frac{A}{B} \cdot \overline{C - V} + 2c = u + c$, e moltiplicando una equazione per l'altra $\frac{A^2}{B2} \cdot \overline{C - V}^2 + \frac{2Ac}{B} \overline{C - V} = u^2 - c^2$; dunque sostituendo, si avrà $Nx^2 = A . C^2 - V^2 - \frac{A^2}{B} \cdot \overline{C - V}^2 - 2Ac . \overline{C - V}$; o sia

$$Nx^2 = AC^2 - AV^2 + \frac{2A^2}{B} CV - \frac{A^2C^2}{B} - \frac{A^2}{B} V^2 + 2AcV - 2ACc,$$

e multiplicando prima per B, indi dividendo per $AB + A^2$, ritroveremo $\frac{NBx^2}{AB + AA} = \frac{BC^2 - AC^2 - 2BCc}{A + B} - V^2 + \frac{2AC + 2Bc}{A + B} \cdot V$ ed aggiungendo, e levando il quadrato di $\frac{AC + Bc}{A + B}$, sarà $\frac{NBx^2}{AB + AA} = \frac{BC^2 - AC^2 - 2BCc}{A + B} + \frac{A^2C^2 + 2ABCc + Bc^2}{\overline{A + B}^2} - \overline{V - \frac{AC - Bc}{A + B}}^2$, e riducendo i termini delle cognite alla stessa denominazione $\frac{NBx^2}{AB + AA} =$

$$\frac{ABC^2 - A^2C^2 - 2ABCc + B^2C^2 - 2B^2Cc + B^2c^2 - ABC^2 + A^2C^2 + 2ABCc}{\overline{A + B}^2} - \overline{V - \frac{AC - BC}{A + B}}^2,$$

e can-

e cancellati i termini, che diſtruggonſi, ſi avrà $\frac{NBx^2}{AB + AA} = \frac{B^2 . \overline{C - c}^2}{\overline{A + B}^2} - \overline{V - \frac{AC - Bc}{A + B}}^2$; dunque $x = \frac{\sqrt{AB + AA}}{\sqrt{NB}}$.
$\sqrt{\frac{B^2 . \overline{C - c}^2}{\overline{A + B}^2} - \overline{V - \frac{AC - Bc}{A + B}}^2}$; dunque $f = Nx =$
$\frac{\sqrt{N} . \sqrt{AB + AA}}{\sqrt{B}} . \sqrt{\frac{B^2 . \overline{C - c}^2}{\overline{A + B}^2} - \overline{V - \frac{AC - Bc}{A + B}}^2}$. Quindi
$fds = \frac{ds . \sqrt{N} . \sqrt{AB + AA}}{\sqrt{B}} . \sqrt{\frac{B^2 . \overline{C - c}^2}{\overline{A + B}^2} - \overline{V - \frac{AC - Bc}{A + B}}^2}$
$= - AVdV$; dunque $ds = \frac{\sqrt{AB} . - VdV}{\sqrt{NA + NB} . \sqrt{B^2 . \frac{\overline{C - c}^2}{\overline{A + B}^2} - \overline{V - \frac{AC - Bc}{A + B}}^2}}$;
nella quale ſi ritrovano ſeparate l'incognite.

A coſtruire con qualche eleganza queſta formula, prendo a maneggiare in prima il caſo ſempliciſſimo, in cui $AC + Bc = o$, in cui cioè le velocità contrarie ſieno in ragion reciproca delle maſſe. In queſto caſo ſi avrà la formula $ds = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{NA + NB}} . \frac{- VdV}{\sqrt{CC - VV}}$, ed integrando $s = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{NA + NB}} . \sqrt{C^2 - V^2}$. Non ſi aggiunge coſtante, perchè poſta $s = o$ ſenz' altro $V = C$. La predetta formula è un luogo all'Elliſſe Apolloniana, che ſi coſtruiſce così:

Sia AB (*Fig. 6*) l'elaſtro nella ſua natural dimenſione, C ſia il centro delle due maſſe; onde AC, BC ſieno le velocità de' due corpi. Fatto centro in A coll' intervallo AC, ſi deſcriva il circolo CD 2D 3D, e condotto il diametro D 3D normale ad AB, ſi faccia come $\sqrt{NA + NB} : \sqrt{AB} : : AD : AF$, e co' due ſemiaſſi AD, AF, ſi deſcriva l'elliſſe FD 2F 3D. AS eſprimeranno gli ſpazj ſcorſi dal mobile, SV le velocità ne' punti S. La figura manifeſta, che prima il corpo ſi

po si porterà da A in F con velocità positive, e giunto in F, l'elastro si ritroverà nella massima costipazione; indi ritornerà da F in A con velocità negative, rilassandosi l'elastro; proseguirà il suo viaggio da A in 2 F, allungandosi più del dovere l'elastro, e in 2 F si ritroverà l'elastro nella massima distrazione; finalmente contraendosi l'elastro, si riporterà da 2 F in A, ritrovandosi in A il corpo in quello stato, in cui era al principio del movimento.

Quel, che si è detto del corpo A, dicasi similmente del corpo B; perchè coll' intervallo BC descritto il circolo CE 2 E 3 E, e condotto il diametro E 3 E normale ad AB, si prenda BE : BG nella medesima proporzione di $\sqrt{NA + NB}$: $\sqrt{AB}$, e co' semiassi BE, BG si descriva l'ellisse GE 2 G 3 E: questa sarà la curva, le cui ordinate daranno le velocità, e l'abscisse gli spazj. Avverto solo, che gli spazj, in egual tempo passati da due mobili, saranno sempre in ragion reciproca delle masse.

Ritrovato il caso semplicissimo per via di costruzione geometrica, passo agli altri casi più composti, e considero generalmente i corpi A, B, dotati delle velocità AH, BH, posto l'elastro nella sua natural distensione. Si osservi, che essendo $AH = C$, $BH = c$, sarà sempre $AB = C - c$, onde divisa AB in C in ragion reciproca delle masse, sarà $AC = \frac{B \cdot \overline{C - c}}{A + B}$, che in avvenire porremo $= p$. Di più $CH = \frac{AC + Bc}{A + B}$, che diremo $= q$; AF pongasi $= m$. Sostituite nella formula cotali specie più semplici, si avrà $ds = \frac{p}{m} \cdot \frac{-VdV}{\sqrt{pp - \overline{V - q}^2}}$. Si faccia $V - q = z$, e fatta la sostituzione, si avrà $ds = \frac{p}{m} \cdot \frac{-zdz - qdz}{\sqrt{pp - zz}} = \frac{-pzdz}{m\sqrt{pp - zz}} - \frac{qpdz}{m\sqrt{pp - zz}}$, ed integrando $s = \frac{p}{m} \cdot \sqrt{pp - zz} + \frac{q}{m} \mathrm{S} \frac{-pdz}{\sqrt{pp - zz}}$, la qual sommatoria si deve prender per guisa, che posto $s = o$, sia $V = C$, dunque

$z =$

$z = C - q$, cioè $AH - CH = AC$. L'esprefione $S \frac{-p\,dz}{\sqrt{pp - zz}}$ dinota un arco circolare, il cui raggio $= p$, ed il cofeno $= z$.

Alla retta AH fi meni la normale $HL = CH = q$, e la parallela LK, e da' punti A, B fi lafcino cader le normali AK, BI. Per non effer obbligati a formar una nuova figura fi concepifcano i corpi coftituiti in K, I viaggiar colle velocità KL, IL, ed il centro delle maffe loro fia c. Condotta a KL la parallela AH, la cui diftanza eguagli cL, ed alzate le normali KA, IB, LH, per rifpetto alla linea AB fi faccia quella coftruzione, che fi è fatta poco dianzi; cioè prefa $AD = AC$, ed AF, che abbia alla AB quella proporzione, che ha $\sqrt{AB} : \sqrt{NA + NB}$, fi defcriva l'elliffe FD 2F 3D; egli è chiaro, che pofta $AX = z$, farà $XV = \frac{q}{m}\sqrt{pp - zz}$; alla qual quantità, per avere la s, convien aggiungere la $\frac{q}{m}$ $S \frac{-p\,dz}{\sqrt{pp - zz}}$ per modo, che, pofta la $z = AC$, fia $s = o$. Prodotta XV, finchè tagli la circonferenza del circolo in Y, fi faccia, come AF : CH :: l'arco DY : VT, la qual fi ponga in diretto colla XV, il punto T apparterà alla curva cercata, perchè $XV = \frac{q}{m} \cdot \sqrt{pp - zz}$, $VT = \frac{q}{m} S \frac{-p\,dz}{\sqrt{pp - zz}}$; dunque effendo $AX = z$, $XT = s$. Non fi è aggiunta coftante, perchè in quefta maniera, pofta $z = AD$, fi ritrova la $s = o$. Ma effendo $z + q = V$, ed $AK = q$, farà $KX = V$; dunque condotta TZ normale a KL, faranno KZ gli fpazj, ZT le velocità. Dal punto 3D condotta la 3DR, e da D la DQ parallele a KL, l'andamento della noftra curva farà il feguente. Partirà dal punto D, toccando la DQ, indi rivolgendo il concavo verfo KL camminando per T, di poi in O mutando il concavo in convesfo, fi porterà a toccare la linea 3DR, indi con un ramo perfettamente fimile, ed eguale al primo, fi porterà di nuovo al contatto della linea DQ, e così con infiniti rami fimili, ed eguali, fi eftenderà all' infinito. Il punto del fleffo contrario fi determinerà prendendo $AP = \frac{pp}{q}$.

N. Io rifletto, che fe $AF = AD$, cioè $m = p$, cioè $\sqrt{AB} = \sqrt{NA + NB}$, l'elliffe fi confonderà col circolo; di più

più se ancor $CH = m = p = AC$, essendo la proporzione di $m : q$ d'egualità, la curva descritta verrà ad essere una cicloide ordinaria.

L. Debbo solamente avvertire, che sovente in caso cioè, che q sia $< p$, (*Fig.* 7) la curva avrà l'andamento DTRTQ, e formerà la foglia TR: lo che, quando accaderà, sarà indizio, che il corpo A nella restituzion degli elastri non sempre avanzerà di cammino, ma sovente tornerà in dietro più, o meno, secondo le circostanze. Lascio tutte l'altre avvertenze, e riflessioni, le quali si potrebbero fare, e che per voi medesimi potrete con più agio dedurre; siccome non descrivo la curva spettante al corpo B, perchè tutte queste riflessioni ci porterebbero troppo lontani. Ma le cose sono spianate per guisa, ch' ogni geometra può per se medesimo dedurne tutte le conseguenze.

C. Queste ricerche sono bellissime, e prescindendo anche dalla presente quistione, meriterebbero d' essere a più potere illustrate. Ma non crederei già, che le aveste portate in mezzo con animo di corroborare la parte leibniziana; perciocchè io similmente, supponendo la parte cartesiana, e facendo l' azioni proporzionali ai tempi, mi prenderei l' impegno di dedurre le medesime conseguenze.

L. Non vi stancate, perchè incominciando dalla legge de' tempi, rinoverete presso a poco lo stesso calcolo. Io so, che in così fatti movimenti, che si vogliono diretti chiamare, ha luogo non meno la legge de' tempi, che quella degli spazj; onde da essi non si può determinare qual sia la principale, e qual contenga dell'azion la misura. Ricordatevi, che fin ora non ho fatto altro, che rispondere, e in rispondendo ho fatto vedere, che se la misura dell' azione nella legge degli spazj sia contenuta, niun di quegli inconvenienti s' incontrano, i quai s' oppongono; ma che per ogni lato vi spicca speditezza, chiarezza, e facilità. Per altro si potrebbe anche per riguardo a due corpi, che in mezzo hanno una forza applicata ad amendue, rinovare il discorso, ch' abbiam fatto jeri, servendoci de' moti indiretti.

C. E in qual maniera?

L. Proporrò un esempio, in cui, dopo aver esposto il metodo volgare, dove la legge non men degli spazj, che de'

tempi vuolsi riconoscer per vera, farò vedere non esser questo il metodo della natura, in cui dimostrerò aver luogo sol la legge degli spazj, non quella de' tempi.

Concepisco una corda elastica ACB, (*Fig.* 8) la quale passando sempre pel punto C, si pieghi. Ad essa sieno applicati due corpi A, B, il primo dotato della velocità $= V$, la cui direzione è per la tangente della curva Aa, per cui è costretto di camminare; l'altro dotato della velocità $= u$, secondo la direzione CB. Nel metodo volgare così discorresi. Esprima AM l'elasticità della corda. Dal punto M si meni la MP perpendicolare alla tangente. La forza MA devesi risolvere nelle due AP, PM. Questa tutta s'impiega nel premer la curva; dunque l'AP è l'unica, che sollecita al moto. Chiamato pertanto il tempicello $= dt$, sarà $AP . dt = AdV$; ma $dt = \frac{Aa}{V}$; dunque $\frac{AP . Aa}{V} = AdV$; dunque $AP . Aa = AVdV$; ma $AP . Aa = MA . Ad$; dunque $MA . Ad = AVdV$. Dall'altra parte si avrà $AM . dt = - Bdu$; si prefigge il segno $-$, perchè la velocità si diminuisce; ma $dt = \frac{Bb}{u}$; dunque $\frac{AM . Bb}{u} = - Bdu$, ovvero $AM . Bb = - Budu$. Queste due formule accompagnate coll' espression della curva, e colla condizione, che gli elementi Aa, Bb si devono nello stesso tempo passare, essendo data l'elasticità della corda per la sua distrazione, somministrano un numero di dati sufficienti a sciorre il problema.

Rinoviamo le nostre avvertenze. Se prendiamo la forza AP; egli è vero, che vale tanto la legge de' tempi, quanto la legge degli spazj. Ma la forza AP non havvi, ne agisce in natura, ma è una forza surrogata da geometri per compier le dimostrazioni; ne altra forza v'ha in natura, ne altra entra in azione, se non l'elasticità AM della corda; dunque a fissar la principal legge, contenente la misura dell'azione, fa di mestieri osservar qual legge vaglia per riguardo alla forza MA; ma per rapporto a questa, non vale sicuramente la legge de' tempi, ma solo quella degli spazj, come fa vedere la formula $MA . Ad = AVdV$; dunque ec.

N. Quì non si fa altro, che rinovare il discorso fatto jeri, ed estenderlo anche a que' casi, in cui una forza è appli-

plicata in mezzo a due corpi. Ma vorrei, che facendo uſo del metodo, mi determinaſte di fatto le velocità de' mobili per la diſtrazion della corda.

L. Io debbo confeſſarvi, che la geometria, e l'analiſi m'abbandona. Per ſoddisfarvi condurrò il calcolo fin dove è poſſibile; veduto il quale, conoſcerete per voi medeſimi dove ſia poſta la difficoltà. Chiamiſi l'elaſticità della corda $= f$, $Bb = dq$, $Ad = dp$, $Aa = ds$, l'accreſcimento della diſtrazion della corda $= dx$. Le due $fdp = AVdV$, $fdq = -Budu$ ſottrate l'una dall'altra, daranno $f.\overline{dq-dp} = -AVdV - Budu$; ma $dq - dp = dx$; dunque $fdx = -AVdV - Budu$. I due ſpazietti Aa, Bb ſcorrendoſi nello ſteſſo tempo, ſaranno, come le velocità, cioè $ds : dq :: V : u$; l'equazion della curva ſia $ds = zdp$, la qual z ſarà data in qualunque maniera per $p = AC$; dunque $zdp : dq :: V : u$; dunque $dp : dq :: \frac{V}{z} : u$, e dividendo $dp : dq - dp \; (= dx) :: \frac{V}{z} : u - \frac{V}{z}$; dunque $dp = \frac{Vdx}{zu - V}$. Similmente $dq - dp \; (= dx) : dq :: u - \frac{V}{z} : u$; dunque $dq = \frac{zudx}{zu - V}$. Soſtituiti pertanto nelle due prime formule così fatti valori ſi avrà $\frac{fVdx}{zu - V} = AVdV$, $\frac{fzudx}{zu - V} = -Budu$. Da queſte due combinate ſi caverà $AdV = -\frac{Bdu}{z}$, e però $SAzdV = Bc - Bu$, onde $u = c - \frac{A}{B} SzdV$; dunque $fdx = -AVdV + AzdV \times \overline{c - \frac{A}{B}.SzdV}$. Quando z foſſe data per V, e per x, nella formula ſi ritroverebbero due ſole incognite. Per ciò fare ſi prenda in mano la formula $fdp = AVdV$; dunque $dp = \frac{AVdV}{f}$; dunque $p = S\frac{AVdV}{f}$; ma z è data per p; dunque è ancor data per $S\frac{AVdV}{f}$. Sicchè nell'equazione rimarranno due ſole incognite; ma ſono nell'equazione così confuſe, e inviluppate, che non v'ha ſperanza alcuna di ſepararnele.

N. Se la curva, da cui non può partirſi il corpo A, foſſe una ſpiral logaritmica, il cui centro C, allora la z verrebbe ad eſſer coſtante, e però la formula non conterebbe veruna difficoltà. Ma negli altri caſi temo non ſia per riuſcir vana, ed inutile ogni induſtria ſomminiſtrataci dalla geometria. Avete ten-

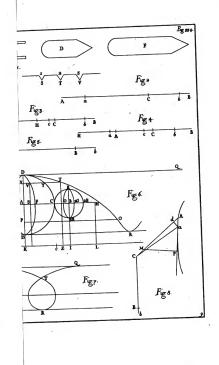
tentato se in alcun altro caso particolare ottener si possa la separazion dell' incognite?

L. Non ne ho fatta sperienza, perchè cotal ricerca all' intento nostro monta pochissimo. Veggio però, ch' ella sarebbe utile ad altri affari, e credo, che sia stata da parecchi tentata; ma che tutti sieno stati dalla difficoltà ributtati.

N. In somma è vero, che la geometria, e l' analisi è il braccio diritto della fisica, e che questa non può rendersi perfetta senza di quella. Oh in quanto grave errore son quelli, i quali pensano, che a divenire un gran fisico basti aver imparato poco più, che il linguaggio de' geometri!

C. Si è fatto tardi, ne ce ne siamo avveduti, onde differiremo a domani il proseguire l' esame intorno agli argomenti presi dalla comunicazione del movimento.

GIOR-

Pag. 334
D
F
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
9

GIORNATA DECIMA

INTERLOCUTORI.

Lelio, Nestore, Cesare.

N. Ripensando meco medesimo seriamente alle cose da noi trattate jeri nel fine della nostra assemblea, cioè a dire a due corpi, che sono posti in mezzo ad una forza per l'una parte, e per l'altra sollecitante, ho compreso ciò, che jeri non m'era caduto in pensiero, esser la cosa di somma importanza per la moderna filosofia, la quale, quando non rinvenga il metodo di render compiuta così fatta teoria, non potrà gianmai condurre a perfezione gl'incominciati sistemi. Conciossiachè non si può omai rivocare in dubbio, dopo gli sperimenti di moltissimi uomini grandi, particolarmente del Signor Musschembroek, che la mutua attrazione, e ripulsione della materia non sia la vera, ed unica cagione di tutti quanti gli effetti, che si veggono in natura accadere. E che altro è la mutua attrazione, e ripulsione, se non una forza constituita in mezzo ai corpi, anzi in mezzo ad ogni particella della materia. Le quali forze se si potessero metter a computo facilmente, non vi sarebbe fenomeno, che non ricevesse agevole spiegazione.

C. Comunque io convenga con voi, che sarebbe cosa molto utile, che in tutte le ipotesi determinar si potessero i movimenti prodotti da una forza posta in mezzo a due, o a più corpi; contuttociò mi farei maravigliato non poco, se quì non avesse una volta, o l'altra condotta l'attrazione, di cui siete tanto amorevole. Ma che vi pensate? d'aver illuminata la fisica, quando ad ogni fenomeno abbiate assegnata l'attrazione per causa? Io per me non ho mai riconosciuta altra differenza tra le vecchie qualità paripatetiche, e la novella attrazione, se non quella, che è tra le voci. Perciocchè siccome i vecchi si studiavano d'acquistar credito di dottrina coll'assegnar prontamente una parola per cagione a ciascun fenomeno; così sembrami, che alcuni moderni filosofanti si studiino d'imporre alla moltitudine, dimostrando d'aver in pugno tutta

la na-

la natura col menzionare ad ogni tratto la pellegrina ſcoperta dell'attrazione.

L. Io non ſon poi auſtero cotanto, e rigido come voi, ne odio per modo la parola d'attrazione, che nell'aſcoltarla ſolo ſenta ribrezzo. Che i fenomeni con diligenza oſſervati da molti, particolarmente dal Sig. Muſſchembroek ſien veri, non può richiamarſi in dubbio, ſe non da chi non preſta fede a ſuoi proprj occhi. Quindi è manifeſto, che molti corpi s'avvicinano l'uno all'altro, molti l'un dall'altro diſcoſtanſi, non eſſendovene cagione, che ſia paleſe, e ſcoperta. Se v'ha l'effetto, vi deve ancor eſſer la cagione. Queſta qualunque ſiaſi, lo la chiamo attrazione, o ripulſione; ſicchè per cotai voci altro non dovrò intendere, ſe non cauſa ignota d'effetto noto. Così per ſervirmi d'un eſempio, niuno s'è mai penſato di far guerra alla gravità, comunque niuno abbia mai ſaputo dire, qual coſa ella ſia. Ma eſſendo noto l'effetto della diſceſa de' corpi, pel nome di gravità, altro non ſi è inteſo, fuorchè l'ignota cagione di cotal notiſſimo effetto.

N. Se colle voci d'attrazione, e di repulſione ſolamente da' newtoniani s'indicaſſero cagioni ignote d'effetti noti, non altro fatto avrebbero, ſe non d'introdur nella fiſica due parole. Ma ſebbene eſſi confeſſano di non ſaper qual coſa ſia l'attrazione, e la ripulſione; pure la ſcoperta loro è di molto maggior peſo, e importanza. Riconoſcono una legge univerſale in tutte quante le particelle della materia, per cui una attrae tutte l'altre, e viene da eſſe attratta vicendevolmente. Quindi tutti i particolari fenomeni non ſono, che una conſeguenza di quella univerſal legge, che in tutta la materia regna, e trionfa. Gli ſperimenti però così numeroſi, ed in ogni genere di corpi riuſciti, fanno chiaramente vedere, eſſervi queſta legge univerſale nella natura, la quale è l'origine, e la fonte d'ogni movimento, e la cagione feconda d'ogni fenomeno. Per le quali coſe vedete, che ſebbene la natura dell'attrazione m'è ignota; pure quando io aſſegno per cagione d'alcun fenomeno l'attrazione, non eſprimo ſolamente una cagione ignota d'effetto noto, ma dò a divedere, che è la ſteſſa la cagione di quello, e di tutti gli altri fenomeni. Così quando il Torricelli ha aſſegnata la gravità dell'aria, per cagione della ſoſpenſion del mercurio, dopo fatto il vacuo, non ha preteſo

ſola-

ſolamente di dire, che la cagione ignota del noto effetto è poſta nell'aria, ma di più, che quella ſteſſa cagione, che produce la diſceſa de' corpi terreſtri avvi ancora nell'aria, e che queſta è deſſa, che ſostiene ne' cannelli ſollevato il mercurio.

L. Io confeſſo, che ſiccome la ſcoperta del Torricelli è grandiſſima, perchè ha con invincibili ſperimenti provato, che quella cauſa, la quale ſoſtenta il mercurio ſopra il livello, fa diſcender l'aria verſo la terra, qualunque volta non ſia impedita; così maſſima, e ſuperior ad ogni lode ſarebbe la newtoniana ſcoperta, quando con forte ragione ſi dimoſtraſſe eſſervi nella natura queſta univerſal legge, ed a lei doverſi tutti i fenomeni riferire. Ma quando ſono ſtate mai prodotte cotali dimoſtrazioni? Sonoſi fatte infinite ſperienze di corpi, che ſi attraggono, e ſi ributtano. Beniſſimo; io non lo niego; anzi gli ſperimenti ſon piani, chiari, e viſibili. Ma come provate, che così fatti ſperimenti derivano dalla medeſima cauſa? Quanto a me ho molte ragioni, e forti motivi da ſoſpettarne. Non parlerò di tutti i fenomeni, ma ſol d'alcuni più celebri, e conoſciuti, ne' quali io ritrovo proprietà così diverſe, ed oppoſte, che non poſſo non aver una ripugnanza grandiſſima a riconoſcerli provenienti dalla ſteſſa cagione. Se eſamino l'attrazion planetaria, eſſa è ſempre in ragion reciproca duplicata delle diſtanze, ſegue coſtantemente la proporzion delle maſſe, ne mai in ripulſione ſi cangia; l'attrazion magnetica è in ragion reciproca non duplicata, ma quadruplicata delle diſtanze, ed ora è attrazione, ora è ripulſione, ſecondo il riguardo agli ſteſſi, o a diverſi poli: dell'elettrica non ne ſappiamo la legge, pure veggiamo, che prima attrae, poſcia diſcaccia gli ſteſſi corpi: l'attrazione poi, con cui il vetro ſolleva parecchi liquori ne' tubi capillari, non ſegue la proporzion della maſſa, ma dell' interior ſuperficie del vetro. E come volete voi, che attrazioni così diverſe, e di proprietà così oppoſte dotate, altre delle quali ſeguono la ragion reciproca duplicata, altre la quadruplicata, qual ſerva la proporzion colle maſſe, qual colle ſuperficie, qual ſi mantiene ſempre attrazione, qual in repulſione ſi cangia, come volete, che ſieno una ſteſſa attrazione, regnante in tutta quanta la materia, che v'ha in natura? Io non credo, che una mente geometrica, aſſuefatta a veder le coſe patenti, e chiare, ſia per perſuaderſelo così di leggieri.

N. Così fatte diversità nascono non dalla diversa cagione, ma dalle diverse circostanze, in cui opera, le quali se dall'occhio, o dalla mente umana discuoprir si potessero, si vedrebbe con tutta chiarezza, siccome quell'universal cagione sia obbligata in questa, o in quella guisa a modificarsi, e a comparir, dirò così, dissomigliante da sè medesima.

L. Che dite mai? Sembrami d'esser assistente ad una disputa, dove chi difende, trovandosi stretto dalla difficoltà, si va raggirando qua, e là, e finalmente s'appiglia a quella qualunque risposta, che gli viene alla mano. Possibile che un geometra d'una tal risposta s'appaghi? Dunque una ideata possibilità, ed una pura apparente non ripugnanza, che quella vostra legge universale ne' casi particolari si vesta di proprietà non sol diverse, ma opposte, sarà appresso voi un motivo forte, ed efficace per introdurla nella fisica, e per istabilirla, siccome un principio fermo, e inconcusso, su cui s'appoggi la spiegazione d'infiniti fenomeni? E come mai s'accorda ciò colle vostre massime, che a perfezionare la fisica fa di mestieri non ricever proposizione, la qual non sia o per se stessa certa, o palesata dalla sperienza, o dedotta da altre verità dimostrate?

C. Non siete voi quello, che avete tant'orror per l'ipotesi? E qual'ipotesi sarà mai più strana di questa vostra? Paragonatela di grazia con quella, che avete alcuni giorni fa condannata. E' vero, che dai cartesiani si suppone la materia sottile riempiente ogni spazio, della quale non si può aver certezza, che sia in natura; ma voi, Signori, non istabilite ad arbitrio un'attrazione universale in tutta la materia fondati sopra fenomeni, che non potete provare non provenire da diverse cagioni? Innanzi. I cartesiani finalmente espongono il modo, con cui debbe agire la materia eterea per precipitar i corpi verso la terra; e questo modo non è ideale, ma fondato sulla natura in guisa, che posti i principj loro, il corpo per necessità deve muoversi, ed avvicinarsi alla terra. Ma voi senza distinguere cosa alcuna in particolare, altro non dite, se non, che, posta quell'attrazione universale in diverse circostanze, di tali divise si cuopre, che non si ravvisa per dessa. Dopo ciò, quale delle due ipotesi vi sembra più ideale, ed immaginaria? Se consideriamo poi in qual delle due abbiavi più fondata speranza di discuoprirne la verità, o la falsità, io confes-

fefferò che in amendue poco, o nulla; ma pure mi fembra più difperata la voftra affai, che la mia. Lafciamo omai così fatti pregiudicj, ne vogliamo far pompa di fapere quello, che non fappiamo; ma feguendo paffo paffo la natura, ftudiamoci d'avanzar le noftre cognizioni in maniera, che non perdiamo mai di veduta la ficurezza di penfar bene.

N. A confeffarvi con ifchiettezza, colle voftre rifleffioni mi deftate dubitazione di ciò, che prima mi fembrava evidente; e nafceva il mio pregiudicio dal credere, che la multiplicità de' fenomeni chiaramente moftraffe effervi un'attrazione univerfale, valevole di produrli tutti in natura. Ma ora veggio, non effere così certo, che quelle attrazioni non fieno di diverfa natura. In avvenire però vi prometto, che qualora mi ufciranno di bocca i nomi d'attrazione, e di ripulfione, non altro intenderò, fe non cagioni ignote d'effetti noti. Quindi lafciando ftar quefto, ritorniamo alla principale noftra materia. Molte cofe fonofi nella paffata giornata abbondevolmente difcuffe, fe non che fi è lafciata da parte non fo qual propofizione, fopra di cui ho qualche curiofità. Il Sig. Cefare, fe non prendo errore, nel dedurre col metodo cartefiano le leggi della comunicazione del movimento avea detto, che le forze vive fi diftruggono, perchè in quanto oppofte, ed eguali s'elidono l'una l'altra. E voi, Sig. Lelio, avendo lafciata da parte quefta ragione, avete fempre parlato in modo, come fe le forze non s'elideffero fe non per la contufione, che fanno.

C. Quefta è una delle cofe appunto, che cadono in controverfia tra i cartefiani, ed i leibniziani, fe forza poffa elidere forza, foftenendolo quelli, e negandolo quefti. Ma non è egli evidente per la meccanica, che due forze eguali, e contrarie per modo fi foftengono l'una contra dell'altra, che interamente s'elidono, e s'impedifcono vicendevolmente l'effetto loro. E perchè non dovrà egli la fteffa cofa nelle forze vive accadere, fe fieno eguali, e contrarie?

L. Quanto a due forze morte eguali, e contrarie, che fieno vicendevolmente applicate, io convengo con voi, che l'una per modo elida l'altra, che vicendevolmente s'impedifcan l'agire; come a cagion d'efempio, fe due elaftri eguali, ed egualmente aperti s'appoggiano l'uno contra dell'altro. Benchè fe non faranno immediatamente applicati, ma in mezzo ad effi

posto sarà un qualche corpo, s'uniranno a costiparlo alcun poco, finchè per mezzo della costipazione acquisti ancor egli una forza eguale a quella degli elastri. Ma via, seguito lo stato di quiete, e d'equilibrio, avrem due potenze eguali, che si sostengono, ed in un qualche vero senso s'elidono. Ma delle forze vive non si vuol ragionar nella stessa foggia; perciocchè se due corpi, di forza viva dotati, vengono l'un contro all' altro, egli è impossibile, che si fermino, o perdan della forza loro, senza produrre o contusione, o distensione, o rottura, o altro effetto di simil genere, ne' quali le forze vive s'impiegano. E la ragione del divario tra l'une, e l'altre si è; perciocchè nelle forze morte noi abbiamo forze pronte ad agire, e a trasfondere l'energia dell'azion loro in que' corpi, a cui si suppongono applicate. Ma nelle forze vive noi abbiam forze, che si conservan nel corpo mosso, e che altro non sono se non facoltà d agire contro all'azion delle forze morte; e però non entrerebbero mai in azione, se altro corpo non s'opponesse al corpo, in cui risieggono, e non obbligasse la forza morta, o la resistenza ad agire contro alle vive. Quindi è, che un' altra forza morta, la qual s'oppone alla prima, può impedir quell'azione, che esercitare vorrebbe; all'opposito un corpo anche in movimento, il qual s'opponga a quello, in cui consideriamo la forza viva, altro non fa, che obbligare la medesima forza viva ad entrare in azione, e a produr quegli effetti, ch'abbiamo poco dianzi considerati, vincendo della forza morta, o della resistenza l'azione.

C. Questa risposta presuppone, che nella contusione, la qual' interviene nell'urto de' corpi molli, s'impieghi parte di quella forza, che in essi risiede: parliamo dell'effetto di contusione; giacchè di tutti gli altri effetti similmente ragionare si vuole. Ma io son persuaso, che nella contusione de' corpi molli niuna forza si spenda; ed una delle ragioni è, perchè se venissero all'urto due corpi perfettamente duri, seguirebbero gli stessi effetti, e non interverrebbe contusione di sorte alcuna.

L. Se nella contusione, che nell'urto patiscono i corpi molli, vi s'impieghi forza sì, o nò, l'esaminaremo tra poco. Trattanto fermiamoci a considerare ciò, che avete in ultimo luogo toccato de' corpi perfettamente duri; giacchè ben

mi

mi ſovviene d'avervi promeſſo ſin dal primo giorno di favellarne.

N. A tempo ve ne ſiete ricordato: per altro io era diſpoſto di ridurvi a memoria la promeſſa, e di eſigerne con rigore il mantenimento.

L. Godo, che l'ultime parole del Sig. Ceſare v'abbiano riſparmiato il roſſore di convincermi o ſmemorato, o infedele. I primi geometri, che hanno penſato di ſtabilir le leggi della comunicazione del movimento hanno tutti gittato l'occhio ſopra i corpi perfettamente duri, avviſando, che, ſe ben queſti in natura non ſi ritrovano, pure da eſſi il buon metodo eſigeſſe l'incominciar la ricerca. A queſti dunque penſando, ſonoſi propoſta l'ipoteſi di due corpi eguali, i quali con celerità eguali, e contrarie ſi veniſſero incontro. Conſiderando così fatta ipoteſi, il Wallis giudicò, ch'eſſi nello ſtante dell'urto doveſſero ogni celerità perdere, e interamente fermarſi; perciocchè non eſſendo eſſi capaci di compreſſione, comechè infiniteſima, non ſi può aſſolutamente rinvenir cauſa veruna, la quale il nuovo movimento determini, e di diretto paſſar lo faccia in retrogrado. Quindi la ſteſſa conſeguenza eſtendendo ancora a' corpi diſuguali, i quali ſi vengono incontro con celerità reciproche alle maſſe, vennero a ſtabilire que' canoni, che noi riconoſciam veri ne' corpi molli.

Altri all'oppoſito, ſiccome il Borelli, l'Ugenio, il Wrenno, diviſando non eſſer poſſibile, che la forza, di cui ſon dotati due corpi perfettamente duri, vada in nulla, e ſvaniſca ſenza produr effetto di ſorte alcuna, giudicarono eſſer neceſſario, che l'uno, e l'altro ritorni in dietro colla ſteſſa celerità. Perciocchè, dicon eſſi, ſe i corpi ſi fermano, non v'ha effetto di ſorte alcuna prodotto, non di contuſione, non di frattura, non d'altro genere, perchè eſſi non ne ſono capaci; dunque perchè queſto aſſurdo in natura non ſegua, fa di meſtieri, che la forza ſi mantenga la ſteſſa, e che i corpi ritengano le ſteſſe velocità, cangiandone ſolamente la direzione. Quindi eſtendendo il canone ancora a' corpi diſuguali, i quali abbiano velocità reciproche alle maſſe loro, vennero a ſtabilir quelle leggi, che noi riceviamo per li corpi dotati di perfetta elaſticità.

Or io domando a voi, che ſiete d'ingegno docile, e che amate di cotai filoſofici diſcorſi, non per entrar in piati, e in liti-

litigj, ma per ricercar la verità, qual de' due raziocinj vi sembra più giusto, e più ragionevole?

N. A me pare sicuramente cosa durissima, che la forza, la quale abbiamo senza dubbio in natura, possa perire, e andar in niente, senza lasciar alcun effetto, da cui si riconosca, ch'ella vi è stata. Io mi metterei più volentieri nella seconda squadra, che nella prima.

C. Ma non vedete, che secondo il vostro avviso, si avrebbe un novello moto, senza cagione determinante? Ne' corpi elastici facilmente io concepisco, che il movimento possa passar in retrogrado, perchè costipandosi i corpi, ogni primiero movimento si perde; indi in virtù della molla, restituendosi, si genera un movimento novello per direzione affatto contraria; ma ne' perfettamente duri, ove non può intervenir compressione, egli è impossibile il ritrovar causa, per cui distrutto il primiero moto, un novello, e contrario venga prodotto. La dove nelle forze eguali, e contrarie abbiamo sufficiente cagione, perchè il moto distruggasi, mercecchè la distruzione d'una è l'effetto dell'altra.

L. Ma se un corpo duro urtasse in un ostacolo perfettamente duro, ed inamovibile, qual sarebbe l'effetto della forza, che si distrugge?

C. Così fatti ostacoli inamovibili non si danno in natura.

L. Non si hanno ne pure corpi perfettamente duri; e pure voi ve ne servite contra di me.

N. Non ci tenete più in pena, e dichiarateci per quale delle due parti militi la ragione.

L. Io penso, che amendue ragionino bene, e dican la verità.

N. Ma questo è impossibile, che due opinioni, del tutto opposte, sieno vere amendue.

L. E per questo io penso, che sieno impossibili i corpi perfettamente duri. Abbiamo due leggi nella natura; la prima, che forza non si distrugga senza produr effetto di contusione, o altro simile; l'altra, che non si possa avere un movimento novello senza causa, che lo determini. La prima legge vuole, che due corpi eguali perfettamente duri, che vanno all' urto con eguali velocità, colle stesse ritornino in dietro. La seconda legge domanda, ch'essi si fermino. Queste due cose insieme

non

non son combinabili; dunque se fossero possibili i corpi perfettamente duri, l'una, o l'altra delle leggi della natura verrebbe meno; e per conseguenza essi non sono possibili. Per la qual cosa recate in mezzo quanti argomenti, che più vi piaccia, presi da' corpi perfettamente duri, ch'io v'accorderò tutte le conseguenze, e v'accorderò anche di più, che la natura si rivolgerebbe in un caos.

C. Voi siete il primo a non voler ammetter l'ipotesi de' corpi perfettemente duri, di cui per altro tutti i buoni filosofi fanno uso; siccome fanno uso de' corpi perfettamente molli, ed elastici, comechè in natura non si ritrovino.

L. Per dir qualche cosa intorno all'ultime vostre parole; egli è vero, che non avvi in natura corpi perfettamente molli, ed elastici; ma questi però non s'oppongono ad alcuna legge della natura, onde si può sopra d'essi rettamente filosofare; anzi il buon metodo lo domanda; perocchè tutti i corpi, ch'abbiamo in natura, stanno di mezzo tra questi due limiti di perfettamente molli, e di perfettamente elastici, avvicinandosi più qual ad un estremo, e qual ad un altro. Ora in così fatta varietà di corpi, non potendosi di tutti separatamente trattare, buon consiglio si è il ritrovare le leggi de' limiti, per poterle poscia adattare opportunamente a que' corpi, che stan di mezzo. Ma i corpi perfettamente duri, non solamente non si ritrovano, ma si oppongono alle diritte leggi della natura. Ne io sono stato il primo a produr così fatta opinione: mi glorio d'essere stato prevenuto dal Sig. Giovanni Bernoulli. L'Accademia di Francia pel premio del 1724 avea proposto così fatto problema. *Quali sieno le leggi, secondo le quali un corpo perfettamente duro, messo in movimento, ne muove un altro della medesima natura, sia in riposo, sia in movimento, ch'egli riscontra, sia nel vacuo, sia nel pieno.* Travagliando il Signor Giovanni Bernoulli in questo soggetto, fece da prima vedere, che se l'Accademia per nome di corpo perfettamente duro intende un corpo, le cui parti non possano in veruna maniera essere ne separate, ne compresse, essa propone un suggetto, che involve manifesta contraddizione. Ma sarà bene, che la sua ragione ascoltiamo da lui medesimo, che così verrà esposta con più energia. Leggete, e incominciate al num. 5. *In effetto*

C. Questa è quella dissertazione, che ha meritati gli elogj dell'

dell' Accademia, ma non il premio. Leggiamo. *In effetto un somigliante principio di durezza non potrebbe esistere. Egli è una chimera, che repugna alla legge generale, che la natura osserva costantemente in tutte le sue operazioni. Io parlo di quell'ordine immutabile, e perpetuo, stabilito dalla creazione dell' universo, che si può appellare legge di continuità, in virtù della quale tutto ciò, che s' eseguisce, si eseguisce per gradi infinitamente piccioli. Sembra, che il buon senso detti, che verun cangiamento non possa farsi per salto; per salto non opera la natura. Non v' ha cosa, che passar possa da una estremità all' altra, senza passar per tutti i gradi di mezzo. E qual connessione si concepirebbe tra due estremità opposte, indipendentemente da ogni connessione di ciò, che è tra mezzo? Se la natura potesse passare da un estremo all' altro, per esempio dal riposo al movimento, dal movimento al riposo, da un movimento al contrario, senza passar per tutti li movimenti insensibili, che conducono dall' uno all' altro, egli converrebbe, che il primo stato fosse distrutto, senza che la natura sapesse a quale ella dovesse determinarsi; giacchè per qual ragione la natura ne preferirebbe uno in particolare, di cui si potrebbe chiedere, perchè questo piuttosto, che qualunque altro? Conciossiachè non essendovi legamento alcun necessario tra questi due stati, niente di passaggio dal movimento al riposo, dal riposo al movimento, o da un movimento all' opposito, ragion veruna non la determinerebbe a produr una cosa piuttosto, che l' altra.*

So, che nella natura vi sono parecchie volte effetti sì pronti, che non si distingue alcun intervallo tra il cominciamento, ed il fine dell' azion loro. Ma segue egli, che però non ve n' abbia? E quelli, che sono convinti, che tutti i generi di quantità sono divisibili all' infinito, avranno eglino difficoltà di dividere il più insensibile tempo in numero infinito di parti picciole, e di collocarvi tutti i gradi possibili di velocità, dal riposo fino ad un movimento determinato, per esempio, dal cominciare fino al dissiparsi d' un lampo?

Concludiam dunque, che la durezza presa nel senso volgare è assolutamente impossibile, e non può sussistere colla legge di continuità. Un poco di riflessione metterà questa verità nel suo lume. Supponghiamo, che due corpi duri in questo senso, e perfettamente eguali si riscontrino direttamente con velocità eguali. Io dico, che dovranno per necessità o fermarsi tutti ad un colpo in urtan-

urtandosi, o dopo l'urto per lo stesso cammino tornar indietro; giacchè cosa assurda sarebbe, che due corpi duri si penetrassero. Ma questi corpi non potrebbero ad un colpo fermarsi senza passar di botto dal movimento al riposo, dall'essere al non essere, ciò, che ripugna alla legge di continuità; nè potrebbero riflettersi nel secondo caso, cioè a dire, cangiar le velocità loro affirmative in velocità negative, senza aver toccate avanti tutte le diminuzioni successive, dalla primiera velocità, fino alla sua total distruzione, e senza acquistare per somiglianti accrescimenti una velocità in senso contrario; ciò che è egualmente opposto a questa legge.

E queste ragioni son di tal sorta, onde non mi sembra punto possibile, che la durezza, presa in quel senso, che per noi si rigetta, possa quadrare alle leggi fondamentali della natura. Perciò io rigetterò li pretesi atomi perfettamente solidi, che parecchi filosofi hanno ammessi. Questi sono corpusculi immaginarj, che non hanno realtà se non nell'opinione de' difensori loro.

L. Eccovi sopra quali motivi si reputano impossibili, e contrarj alle leggi della natura i corpi perfettamente duri; ammessi i quali si deducono tutte le conseguenze, che voi volete; perchè rotta alcuna delle sue leggi, la natura altro non sarebbe, che un complesso di disordine, e confusione.

C. Così fatte ragioni dell'incomparabile Signor Giovanni Bernoulli, quantunque sembrino convincenti, pure non sono state valevoli di muovere l'intelletto del Sig. Francesco Zanotti.

L. Me ne ricordo. Or voi mi tornate a memoria ciò, che scrive quel dotto filosofo, perchè sopra i suoi pensieri ho molte cose da ponderare.

C. In primo luogo egli riflette, che i leibniziani ricorrono all'impossibilità de' corpi perfettamente duri, quando devono rispondere all'argomento de' cartesiani, che se due corpi duri vengono all'urto con velocità reciproche alle masse si fermano; ma non potrebbero fermarsi, se le forze eguali non fussero; dunque ec. Che rispondono, dice egli, a così fatto argomento i leibniziani? che i corpi perfettamente duri sono impossibili. Questo è un declinar l'interrogazione, non un rispondere. Ma prima, come mai negano la possibilità de' corpi perfettamente duri? Se si domandasse se sieno in natura, la cosa

non ostante sarebbe dubbia. Ma non si ricerca se sieno in natura; ricercasi solo, se esser vi possano; ne pur si cerca, se la presente natura delle cose permetta i globi durissimi; si cerca s'essi esser possano assolutamente da Dio creati. Ma se esser possono in qualsivoglia maniera, non malamente interrogano i cartesiani, qual cosa accaderebbe a così fatti corpi; ed è parte di buon filosofo il rispondere.

L. Non mi condurrà il Sig. Zanotti a discutere presuntuosamente gli abissi dell' infinita potenza di Dio, che profondamente io venero. Non ho giammai detto, che Iddio non possa assolutamente creare corpi durissimi: ho detto, ch'essi non istanno colle presenti leggi della natura; onde per me non si sostiene una assoluta impossibilità de' corpi perfettamente duri, ma una impossibilità fisica, cioè che servate le presenti leggi della natura, essi sono impossibili. Però se giudica esser parte di buon filosofo rispondere a questa interrogazione, qual cosa accaderebbe, se creati da Dio due globi durissimi venissero all' urto con velocità reciproche delle lor masse: risponderò, che si distruggerebbe una qualche legge, che il sommo Creatore ha posta nella natura, e che sarebbe d' uopo alcun' altra diversa sostituirne.

C. Ma concediamo pure, segue il Sig. Zanotti, che i corpi durissimi sieno impossibili; e perciò non dovranno i leibniziani rispondere? Quante cose sono impossibili, e pure con frutto di esse s' instituiscon quistioni? Non è impossibile la radice quadrata di due? e pure se ne ricerca la proporzione; non è impossibile la compenetrazione de' corpi? e pure sovente fingono i geometri due corpi compenetrati per provarne l' egualità; non sono impossibili le linee, e le superficie matematiche? e pure quante cose sopra d' esse con utilità non si cercano? E perchè non si potrà similmente instituir quistioni intorno a' corpi perfettamente duri, siccome s' instituiscono intorno a' perfettamente molli, ed elastici, intorno a' corpi, od a' piani immobili, i quali ne si danno, ne forse dare si possono? Se pertanto domandasi qual cosa seguirà a due corpi perfettamente duri, che vengano all' urto con velocità reciproche delle masse, rustico, ed inurbano sarà il rispondere, che i corpi perfettamente duri sono impossibili.

L. Mi dispiace assai, che la risposta data sembri rustica, ed

ad incivile al Sig. Zanotti, che di gentilezza, e di cortesia è esemplare perfetto. Per non obbligarmi adunque d'investigare qual sia l'impossibilità degli esempj addotti, il qual esame ci porterebbe troppo lontani, mi studierò di rispondere con più di civiltà all'interrogazione, ch'egli propone intorno a' corpi perfettamente duri, e dirò, che

Se due corpi di tal natura venissero all'urto con velocità, che fossero alle masse in ragion reciproca, sarebbe di mestieri, che una qualche legge della natura venisse meno, e che in suo luogo se ne sostituisce una qualche altra, che non saprei indovinare, qual esser potesse. Ed io sono d'intendimento sì corto, e poco penetrante, che non mi dà l'animo di stabilire quel, che accadesse in ipotesi, che le presenti leggi della natura più non valessero: nel qual caso non saprei qual potesse esser la legge principale, che regolasse l'economia degli effetti, e delle cagioni. Una risposta più cortese di questa non saprei dargli, mentre è fondata sopra una schietta confessione di mia ignoranza. All'opposito de' corpi perfettamente molli, e perfettamente elastici, risponderò con franchezza, che gli uni si fermeranno, gli altri torneranno indietro colle stesse celerità; perchè non venendo meno le presenti leggi della natura, queste mi sono sicuri principj, da cui posso conseguenze chiarissime ricavarne. Anzi se supporrò per modo i corpi perfettamente duri, onde stiano salde le leggi della natura, risponderò sempre, e dirò quello, che accader deve. Tale è l'ipotesi del Sig. Giovanni Bernoulli, il quale ai corpi elastici sostituisce i corpi perfettamente duri, ma che conducano seco un elastro immateriale, per mezzo di cui mentre si serra, e si apre, si faccia la comunicazione del movimento. Così supporrò i corpi immobili, e dirò quello, che seguirà, quando un corpo molle, od elastico urta in un corpo supposto immobile; perocchè in tutti questi casi dalle presenti leggi della natura, le quali non vengono meno, deducesi ciò, che deve in ciascuna circostanza seguire.

C. Ma quanto voi leibniziani nel rispondere mancate di cortesia, altrettanto egli ne abbonda, e ne fa pompa; mentre dopo aver distrutta, come egli si pensa, la vostra risposta, d'un'altra ve ne provvede, atta a serrar le parole in bocca ai cartesiani.

L. Del cortese animo, con che ce l'addita, grazie glie ne rendo: per altro, non difendendo noi i leibniziani, ma la verità, ci userà ancora la gentilezza di permetterci la libertà filosofica d'esaminarla.

C. Mi studierò d'esser breve, e di restringere in corto ciò, che il Sig. Zanotti spiega con più parole. Egli distingue due generi di forze, cioè la motrice, e la viva. La motrice è quella, che crea il movimento, cioè muove i corpi; se altro effetto operi, non sarà motrice, giacchè in tanto è motrice, in quanto ella muove. La forza viva è quella, per cui un corpo posto in movimento, opera qualche effetto, e che nell' operar l'effetto si consuma, ed estingue. Cotai effetti sono o di ammaccare, o di rompere, o di serrare elastri, o di vincer l'azion opposta della gravità, od altri simili. Ciò posto, la forza motrice è proporzionale alla massa, ed alla velocità; ma la forza viva corrisponde alla massa nel quadrato della velocità.

Venendo all'urto due corpi perfettamente duri con velocità reciproche alle masse, essi si fermeranno, ed il fermarsi non inferirà egualità tra le forze vive. Conciossiachè in tal genere d'urto i corpi non si ammaccano, non cangian figura, non romponsi, ne in essi altro effetto somigliante producesi; dunque non s'esercitano le forze vive, ma soltanto le forze motrici; le quali essendo eguali perfettamente, non è maraviglia, se vicendevolmente s'elidano, ed ogni movimento s'estingua.

L. Non vorrei comparir doppiamente rustico appresso il Sig. Zanotti, se sono costretto di non accettar il dono, ch'egli mi porge d'una novella risposta. Ma io sono tra due: perchè è necessario o ch'io sembri incivile a lui, o che riesca incivile alla verità. Dirò pertanto schiettamente ciò, che mi fa dubitare intorno al sottile sistema del Sig. Zanotti. E perchè coll'interrogare forse meglio i miei concetti esporrò: però ditemi. Io ho due corpi perfettamente molli, i quali vengono all'urto con velocità reciproche delle masse; qual cosa avverrà?

C. Dopo l'urto si fermeranno.

L. Ma nell'urto medesimo si produrrà effetto alcuno?

C. Sì bene. Nell'urto si produrrà una notabile ammaccatura, formata la quale, si estinguerà ogni movimento.

L. E

L. E quali forze s'esercitano in cotal urto, le motrici, o le vive?

C. Le vive, perchè ammaccatura producesi.

L. Prendo due altri corpi perfettamente molli, ma più rigidi, e resistenti, e torno a far le medesime interrogazioni.

C. Ed io in due parole risponderò, che si formeranno ammaccature, ma minori delle passate, e che nel formarle si eserciterà la forza viva, e si consumerà.

L. Benissimo. Io li prendo ancora più rigidi, e sempre più, finchè sieno pervenuti ad una rigidità infinita, che non riceva se non una infinitesima contusione.

C. Si formeranno contusioni sempre minori, e minori, e finalmente una contusione infinitesima; e in formar tutta questa serie di contusioni, sarà sempre necessario l'esercizio della forza viva, la quale s'impiegherà in tal effetto.

L. Vengo ora all'ultimo termine della serie, e prendo due corpi assolutamente rigidi, che non ammettano contusione di sorte alcuna, e rinovando l'interrogazioni, vi prego a rispondermi.

C. Ora dirò, che non essendovi contusione, ne effetto alcuno, le forze vive niente operano, ma sol le forze motrici.

L. E questa risposta, cred'io, che s'opponga al retto discorso. Conciossiachè in tutti i termini della serie le forze vive operano sempre egualmente, tutte s'impiegano nel produrre la contusione o maggiore, o minore, o sia infinitesima. E come mai può accadere, che in tutti i termini della serie un genere di forze eserciti sempre azioni eguali, e che nell'ultimo termine della serie si faccia questo gran salto, che il medesimo genere di forze cessi d'operare, e interamente stia ozioso? Ciò è per diametro opposto all'inviolabil costume della natura, la quale se in tutti i termini della serie mantiene sempre mai costante la stessa proprietà, la conserva similmente nell'ultimo; e se mai accade, che una proprietà nell'ultimo termine venga meno, ne' termini intermedj si va successivamente diminuendo, fino ad annullarsi nell'ultimo.

N. L'argomento è robustissimo, ne avvi sottigliezza dialettica, che sia valevole di snervar la sua forza. Oltre di che ascoltate ciò, che in pensiero mi cade. Due corpi perfettamente duri, che vengono ad incontrarsi con velocità servanti

la

la ragion inversa delle masse, sono senza fallo forniti di forza viva, per confessione ancora del Sig. Zanotti. Nell' urto non altre forze s'esercitano, secondo ch'egli pensa, se non le forze motrici. Nell'urto non men le vive, che le motrici s'estinguono. Or io domando, come mai le forze vive s'estinguano?

C. Le motrici s'estinguono, perchè essendo eguali, e venendo al contrasto, l'una l'altra distrugge. Delle vive non saprei che dire.

N. O s'estinguono le forze vive, perchè producano un qualche effetto, o perchè l'una elida, e distrugga l'altra. Non si è mai pensata altra maniera, onde le forze, che sono in natura possano estinguersi. Nella prima maniera nò; perchè supponendosi i corpi perfettamente duri, niun effetto si produce: e per questa ragione si vuole, che non le forze vive operino, ma sol le forze motrici. Se mai il dotto autore s'appigliasse alla seconda maniera; io ripiglierò, e come mai è possibile, ch'una elida, e distrugga l'altra, senza venire al contrasto? Se poi vengono al contrasto, torna in campo vigorosa la difficoltà: come mai due forze ineguali elidere vicendevolmente si possano, e non debba prevaler la maggiore.

C. Ma supposta la possibilità de' corpi assolutamente duri, non vi sarebbe maniera atta a rintuzzare l'argomento de' Cartesiani?

L. Sì, Signore, ne ho una, ch'è sufficiente, e poichè me la domandate, ve la dirò volentieri, perchè veggiate, che la sentenza del Leibnizio non è del tutto appoggiata sull' impossibilità de' corpi durissimi. Assumo per amor di facilità l'ipotesi, che un corpo urti in un piano immobile, e duro, perchè tutto quel, che diremo, si potrà ad ogni altra ipotesi accomodare. Dovendo poi avanzarmi per via di serie, spiegherò meglio i miei concetti colle interrogazioni. Vi domando pertanto, se un corpo molle urta nell'immaginato piano immobile, e duro, che avverrà nell' urto?

C. Il mobile si ammaccherà, ed ammaccato si fermerà.

L. Avremo azione in questo caso, sì, o nò?

C. La coerenza delle parti, o altra resistenza entrerà in azione, dalla quale si diminuirà, anzi s'annullerà la forza, ch'era prima nel corpo.

L. Co-

L. Cotal' azione si farà ella in un tempo, e per uno spazio determinato?

C. E chi ne può dubitare? si farà in un tempo determinato, e per lo spazio dell' ammaccatura seguita.

L. Se il corpo stesso urtasse con maggiore, e con minore velocità, qual' azion seguirebbe?

C. Un' azione maggiore, o minore, la quale s' eserciterà in un tempo maggiore, o minore; e perciò si farà un' ammaccatura molto maggiore, o minore.

L. Prendo ora un corpo perfettamente molle bensì, ma più, e più resistente, e rigido, fino che pervenga ad una rigidità infinita, e suppongo, ch' egli urti nel predetto piano.

C. Le azioni in tutti i corpi saranno eguali, ma non l'ammaccature, le quali riusciranno minori, e minori, e poi infinitesime: e però i tempi, e gli spazj, per cui l' azioni s' esercitano, caleranno di mano in mano, fino a divenir infinitesimi. Egli è vero però, che se paragoninsi l' azioni contro al medesimo corpo urtante con diverse celerità, le maggiori v'impiegheranno spazio, e tempo maggiore, che le minori; quantunque fussimo al grado infinitesimo pervenuti.

L. Passiamo dunque all' ultimo termine della serie, e prendiamo un corpo durissimo, che non riceva ne pur una infinitesima contusione.

C. Esercitando la coerenza delle parti in tutti i termini della serie azioni eguali, bisognerà che l' eserciti ancora in questo. Ma perchè nulla contusione interviene, bisogna dire per necessità, che qualunque azione o maggiore, o minore s' eserciti in uno stante, e in un punto. Questo ne deriva per legittima conseguenza.

L. Sicchè vedete esser i corpi duri di tal natura, onde la coerenza delle lor parti è valevole d' esercitare qualunque azione e maggiore, e minore in uno stante solo di tempo, ed in un sol punto di spazio.

N. Ma questo sembra un manifestissimo assurdo, perchè...

L. Fermatevi, ne vi stancate a provarlo, perchè senza prova ve lo concederò di buon grado. Ma tutto ciò che vale? Unicamente a dimostrare l' impossibilità de' corpi durissimi, non già a far vedere, che, se v' abbia de' corpi duri, ciò non debba seguir di necessità. Or siccome noi supponiam l' esistenza de' corpi

corpi duriſſimi, così ancora ſuppor dobbiamo, che in eſſi ſia una reſiſtenza poſſente d'eſercitar azioni maggiori, e minori in uno ſtante, e in un punto. Ciò ſuppoſto, ſe un corpo duriſſimo urta in un piano, e ſi ferma, mi ſapreſte voi dire quant' azione ſiaſi eſercitata?

C. Queſto è impoſſibile, perchè eſſendoſi il tutto fatto in iſtante, ne eſſendovi ammaccatura, non v'ha alcun dato; poichè ne' corpi duri in iſtante la coerenza delle parti eſercitar può maggiore, e minore azione. S' egli foſſe ſtato molle, potrei dalla contuſione conghietturarlo.

L. Dunque non mi potrete dire quali azioni s'eſercitano contro a due corpi duriſſimi, che ſi vengono incontro con velocità, che ſono in ragion reciproca delle maſſe, quantunque ſe ne ſia eſercitata.

C. Nò certamente.

L. Dunque per ſaperlo non v' ha altro mezzo, che ricorrere a tutti gli altri termini della ſerie, e veder ciò, che in eſſi intervenga, e da queſti ſi potrà far paſſaggio all' ultimo.

C. Così è.

L. Ma in tutti i termini della ſerie fanno vedere i leibniziani, che l'azioni eſercitate contra de' due corpi dalla coerenza delle parti, ſono in ragion reciproca delle maſſe; dunque ancor nell'ultimo termine, che contiene i corpi duriſſimi. Vedete pertanto, che il caſo de' corpi perfettamente duri non ha maggior difficoltà, che gli altri, e che anche ſenza ricorrere all' impoſſibilità loro ſi ſoſtiene ottimamente l' opinione del Leibnizio.

N. Diſcuſſo ancor queſto punto, entriamo finalmente a vedere ſe nella contuſione, che accompagna l'urto de' corpi molli, vi ſi ſpenda parte della forza primitiva; giacchè da queſto io veggio, che dipende il maſchio della quiſtione.

L. Voi la diviſate a ragione; perchè ſe niuna forza vi s'impiega, la verità ſi ritrova dalla parte de' carteſiani; ma ſe non ſi può ſenza forza la contuſione ottenere, fa di meſtieri, che s' abbracci la ſentenza del Leibnizio. Ma chi ſi potrà mai indurre a credere, che in natura ſi poſſa avere un nuovo effetto ſenza cagione? Quando le due sfere nell'urto, e nella percoſſa ſoffrono una vicendevole contuſione, non ſi muta la figura delle sfere, e per conſeguenza non ſi cangia lo ſtato de'

cor-

corpi? dunque s'ottiene in natura un novello effetto; ma egli è impossibile, che un nuovo effetto s'ottenga senza cagione, e per conseguenza senza forza; fa dunque di mestieri, che nella contusione parte della forza primitiva si spenda.

C. Qui sta il maschio della quistione. Non v'ha, cred'io, cartesiano, cui sia entrato in mente d'asserire, che la contusione venga prodotta senza cagione. Ma quella cagione, che produce la comunicazione del movimento, quella stessa genera ancora la contusione, nè v'ha bisogno di due diverse cagioni, l'una per un effetto, l'altra per l'altro.

L. Così fatta risposta, che per altro è applaudita, m'è sempre paruta incomprensibile. Abbiamo due effetti in natura, l'uno di compressione, l'altro di movimento. Una stessa causa li produce per modo, che è proporzionale a ciascun di loro, preso separatamente. Che altro è questo, se non asserire un effetto duplo della sua causa: cosa che alla buona metafisica direttamente s'oppone. E' di mestieri dunque dividere in due parti la forza primitiva, ed una assegnarne alla contusione, rimanendo l'altra viva nel movimento de' due corpi dopo la percossa.

C. Il vostro discorso sarebbe giusto, e legittimo, quando gli esposti fossero due effetti veracemente diversi; ma quantunque in apparenza sien due, in sostanza non son poi altro, che un medesimo effetto. Ed io la diviso così, chiaramente spiegando, siccome nell'urto de' corpi debba formarsi contusione, ed ammaccatura per guisa, che non si richieda altra forza, fuori di quella, che passa da un corpo all'altro. Il corpo A portisi ad urtare il corpo B, il quale o sia in quiete, o si muova alla medesima parte con minore velocità. Mentre i due corpi vengono all'urto, l'ultime particelle del corpo A incontrano le prime del corpo B, e percuotendole, loro comunicano parte del movimento, di che eran dotate; dunque l'ultime particelle del corpo A, avendo perduta qualche velocità, cammineranno più lente dell'altre particelle componenti il medesimo corpo; e però fa di mestieri, che segua qualche contusione. Similmente le prime particelle del corpo B, avendo ricevuta novella celerità, viaggeran più veloci, che l'altre particelle dello stesso corpo; dunque converrà, che tra esse si faccian strada, e che per conseguenza segua mutazion di figura nel corpo. Così nel se-

guente tempicello le particelle dotate di maggiore velocità ſeguiranno ad agire contra dell altre, e ne' tempi ſeguenti, replicandoſi la percoſſa, ſi continuerà a formare la contuſione ſin a tanto, che i corpi ſi trovino dotati, e forniti della ſteſſa velocità. Ecco pertanto ſiccome quella forza, che ſi va di mano in mano trasfondendo dall' uno nell' altro corpo, ſia ſufficiente, ſenza biſogno d'altra forza, a formare la contuſione.

Che ſe vi piaccia di conſiderare corpi, i quali con velocità contrarie vengono all'urto, v'accorderò agevolmente, che nell'urto interviene perdita di forze; ma ciò proviene, non perchè ſi formi contuſione, ma perchè le forze, contrariandoſi, in parte vicendevolmente s'elidono. Concioſſiachè quando le particelle de' due corpi, che ſi toccano, ſon portate a parti contrarie, perdono di botto o tutta, o in parte la velocità loro; di quì deve naſcere la coſtipazione; perciocchè l'altre ſeguono per poco il viaggio loro colla ſteſſa velocità; la qual coſa non ſi può ſeguire, ſe le parti primamente venute al contatto non ſi mettono in mezzo a quelle, che lor ſuccedono. Se le forze ſono eguali, interamente le particelle ſi fermano; ſe diſuguali, la più debile interamente ſi perde, ed elide una parte eguale della più forte, rimanendo viva l'altra parte, ed applicandoſi a comunicar il movimento alle particelle, che ſono in ripoſo, o dotate di minore velocità. Ed eccovi interamente ſpiegato, ſiccome quella medeſima forza, che s' impiega a comunicar il movimento, ſia valevole a produr ancora la coſtipazione. Queſti dunque non ſono due effetti diſtinti, ma uno ſteſſo effetto, a cui non ſi richiede più d'una forza.

L. Così fatta dottrina, che moltiſſimo piace a' carteſiani, ha un'aſſai bella apparenza, ma poca ſuſtanza. Eſſa è tutta fondata ſopra un principio, che inteſo nel buon ſenſo, è veriſſimo; cioè che la forza, ovver la reſiſtenza d' inerzia non eſtingue mai forza, ma fa unicamente, che da un corpo paſſi nell'altro. Quindi per voi deduceſi, che la forza viva non può giammai eſtinguerſi, ſe non ſe da una reſiſtenza poſitiva, o da una forza viva contraria. Ammetto la prima parte, ma non già la ſeconda; perchè, ſiccome abbiamo detto, io porto ferma opinione, che forza viva non diſtrugga mai forza viva, ma quando ſi dirigono in parte oppoſita, amendue concorrano a produrre un' effetto maggiore di contuſione, o rottura, od altro. Ma quanto al pun-

punto presente, ci fermeremo nella resistenza positiva; giacchè conveniamo, che ove abbiasi resistenza positiva, ivi debbasi impiegare, e distruggere forza.

E che? pensate voi, che nella comunicazione del movimento, quando si forma la contusione, altra resistenza non intervenga, che la resistenza d'inerzia? V'ingannate. Non è necessario, che alcune particelle s'introducano, e si facciano strada per mezzo alle vicine? Nella qual mutazione non può a meno, che non patiscano frizione, che non vengano impedite dalla tenacità, e dalla coerenza della materia, che molte particelle non si muovano lateralmente, e con direzione ne cospirante, ne contraria alla direzione de' corpi; le quali sono tutte resistenze positive, per cui vincere, secondo gli stessi vostri principj, è necessario, che s'impieghi, e che si consumi forza.

C. Ma d'onde proviene, che il corpo urtato non riceve tutta ad un colpo la velocità dell'urtante, ma a poco a poco, non sol per quel, che riguarda i gradi della velocità, ma ancor per quel, che concerne le particelle, che cangiano movimento, se non perchè i corpi son dotati d'inerzia, la qual resiste alla mutazione di stato.

L. Due cose fa di mestieri distinguere: altra cosa è, che nella comunicazione del movimento altra resistenza non intervenga, che la resistenza d'inerzia; altra, che le resistenze positive, che s'incontrano, nascano per la forza d'inerzia. Il primo è falsissimo, il secondo è vero, e dalla vostra ragione resta provato. Ma ciò che importa? Non altro, se non questo; che quantunque non si debba perder forza veruna nel vincere la resistenza d'inerzia, pure se ne dee consumare nel sostener l'azione di quelle positive resistenze, che nascono per occasione della forza d'inerzia.

N. Io amo di prender ancora la cosa per altro verso. Sia posto il corpo B, di materia molle formato, dentro ad un emisfero metallico, il quale sia fermamente inchiodato in un muro immobile. Urti contro ad esso il corpo A con una determinata celerità, e formi una determinata contusione. In questa si spende, ed impiega tutta la forza del corpo A, perciocchè altro effetto non si può assegnare, nel quale consumasi.

Si lasci libero il corpo B, e contro ad esso urti il corpo A con velocità tanto maggiore, quanto è necessario, acciocchè la

ſteſſa contuſione ſi formi. Quì abbiamo lo ſteſſo effetto di contuſione: nel primo caſo tutti confeſſano, che a produrlo s'è impiegata una determinata quantità di forza; e perchè non ſi dovrà impiegar nel ſecondo, eſſendo aſſioma incontraſtabile, che gli ſteſſi effetti vengono ſempre mai da forze eguali prodotti.

L. Determiniamo qual proporzione nel ſiſtema del Leibnizio, o, per più vero dire, dello s'Graveſande debbano avere le due velocità del corpo A, acciocchè e nell'un caſo, e nell'altro ſi formi la medeſima contuſione. Sia $= x$ la velocità del corpo A, che urta il corpo B immobile, ed $= V$ la velocità dello ſteſſo corpo, che urta il corpo B mobile. In queſto caſo la parte di forza, che nella contuſione ſi perde, è $= \frac{ABV^2}{2 \cdot \overline{A+B}}$; dunque dovrà eſſere $\frac{Ax^2}{2} = \frac{ABV^2}{2 \cdot \overline{A+B}}$, ovvero $x : V :: \sqrt{B} : \sqrt{A+B}$; come ſi dovea ritrovare. Ne a caſo ho inſtituito così fatto calcolo, perciocchè la ſperienza ha inſegnato al Sig. s'Graveſande, che qualunque volta la forza intera d un corpo, che urta in un altro immobile, la qual forza interamente nella contuſione ſi ſpende, è eguale a quella parte, che, ſecondo la ſua determinazione, nella contuſione s'impiega, quando il corpo urtato è ſoſpeſo mobile nell'aria, le contuſioni ſi formeranno ſquiſitamente eguali. Eccone la prova nel ſeguente ſperimento. I due cilindri E, G, (*Fig.* 1) le cui maſſe ſono come 3 : 2, ſi vengano incontro il primo colla velocità $= 17$, l'altro colla velocità $= 3$. Di più il cilindro F, la cui maſſa $= 4$, urti nel corpo immobile N colla velocità $= 11$, la ſperienza fa vedere, che nell'un caſo, e nell'altro ſi formano foſſe eguali Nel ſecondo caſo la velocità di $F = 11$, dunque il ſuo quadrato $= 121$, il quale multiplicato per la maſſa $= 4$, e diviſo il prodotto per 2, da la forza del corpo $F = 242$. Nel primo caſo la formula della forza, che nella contuſione ſi ſpende è $\frac{EG \cdot \overline{V+u}^2}{2 \cdot \overline{E+G}} = \frac{6 \cdot \overline{20}^2}{2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 400}{5}$ $= 3 \cdot 80 = 240$, la qual forza non differiſce dall'altra, ſe non ſe per una minuzia, la quale non può dar coſa ſenſibile nello ſperimento.

N. Queſto genere di ſperimenti termina di convincermi; per-

perchè se ogni qualvolta quelle forze, che, secondo la teoria dello s' Gravesande, devono nella contusione impiegarsi, sono eguali, sempre contusioni eguali si producono: egli è indizio manifesto, che questi sono i veri effetti di quelle. Ed in questa sentenza io ritrovo la necessaria corrispondenza tra la cagione, e l'effetto. La dove io non saprei nella sentenza cartesiana, che insegna non ispendersi forza nella contusione, fissar criterio alcuno, che la quantità della contusione determinar mi dovesse.

C. Il criterio spedito, e facile, a mio credere, è questo. La quantità della contusione corrisponderà mai sempre a quella, che da' cartesiani s'appella forza dell'urto, o della percossa, e che s'esprime per $\frac{2AB\,.\,\overline{V-u}}{A+B}$. La qual forza non è diversa da quella, per cui si genera la comunicazione del movimento. Laonde supposti sempre gli stessi corpi, ella vien ad essere proporzionale alla velocità respettiva.

N. Così fatto criterio non lo giudico sufficiente; perocchè egli può unicamente servir al caso, in cui i corpi sien mobili; ma se uno sia immobilmente fermato al muro, la contusione viene ad esser maggiore di quel, che porti la celerità respettiva negli altri casi. Sicchè avete bisogno di aggiunger criterio a criterio per determinar la quantità della contusione.

C. Nò Signore; perchè in tal caso io devo considerare il corpo B, che è l'urtato, siccome infinito, e spogliato d'ogni velocità: e ciò posto, la formula della forza dell'urto, o della percossa, verrà ad essere $= 2\,A\,V$.

N. Ditemi di grazia qual' era la velocità del corpo A innanzi alla contusione.

C. L'abbiamo supposta $= V$.

N. Dunque in sentenza vostra la forza, di che è dotato, altra non può essere se non $= A\,V$. Altra forza quì non abbiamo, supponendosi immobile il corpo B. E come dunque volete, che la forza dell'urto, e della percossa sia doppia della primitiva? E quì non va'e la scusa, che è la medesima la forza della percossa, e quella che si comunica; perchè siccome non può comunicarsi quello, che non si ha, così non è possibile, che la forza della percossa riesca maggiore della primitiva.

L. Ecco uno sbaglio inescusabile di molti cartesiani nel determinare la forza della percossa, a cui però possono adoprare un

un qualche rimedio, dicendo, che ſin ora hanno preſo abbaglio, determinandola dupla di quello, che è in fatti, e che la vera formula è $\frac{AB \cdot \overline{V - u}}{A + B}$. Modificata così la formula, ſaranno sforzati di dire, che nella reſtituzione de' corpi perfettamente elaſtici, la forza della percoſſa tutta intera s' aggiunge ad un corpo, e ſi leva all'altro. La qual conſeguenza, ſiccome s' accordi co' principj loro, che l' azion della forza elaſtica ſi deve ſempre dividere per metà, e l'una parte all'uno, e l' altra all'altro donarſi, lo veggian eſſi, ch' io non amo d'entrare in così fatta diſputa, deviando dal principale ſuggetto.

N. Ammeſſa ancor così fatta correzione neceſſariiſſima, io voglio, che diſtinguiamo il caſo, in cui un corpo urta un altro corpo infinito, e mobile, a cui deveſi comunicare una celerità infiniteſima, dal caſo, in cui urta un corpo immobile, a cui niuna celerità ſi comunica, e che anche in queſto caſo, coi dati, che s' hanno, la quantità della contuſione mi ſi determini.

C. E non vedete, che in queſto caſo alla forza del corpo moſſo s' oppone l'elaſticità delle fibre, che tengono fermamente unito il ſoſtegno immobile al corpo terreſtre: per vincere, e ſuperare la qual elaſticità, ch'è contraria, fa di meſtieri, che ſi conſumi, e s' impieghi quella forza, che paſſerebbe da un corpo ad un altro nella comunicazione del movimento.

N. Voi volete, che ſi conſumi forza nella tenſion delle fibre elaſtiche, e poi non volete, che ſe ne ſpenda nel vincere la frizione, la tenacità, la coerenza delle parti, nello ſpingere con moto laterale le ſteſſe parti. Qual coſtanza di dottrina? Non ſono queſte reſiſtenze poſitive egualmente, che l'elaſticità delle fibre.

L. Favoritemi, che l' ultime parole del Sig. Ceſare mi mettono in mano un altro argomento di maſſimo nerbo per provare, che a formare la contuſione, voglia, o non voglia, è neceſſario, che forza ſi conſumi, e s' impieghi. Sicchè voi convenite meco, che a diſtender le fibre elaſtiche, ovvero a comprimerle, deveſi di neceſſità impiegar forza.

C. Lo giudico un principio innegabile: e chi lo negaſſe, contraddir ſimilmente potrebbe a qualunque principio ſiſico.

L. Se così è: vengano all' urto due corpi perfettamente, o imperfettamente elaſtici. Voi convenite, che in queſto genere

nere di corpi due azioni intervengono; l'una, con che si fa la compressione; l'altra, per cui le parti compresse alla primiera figura ritornano. La prima azione è comune tanto a' corpi molli, quanto agli elastici, e per riguardo ad amendue i generi de' corpi, vaglion le stesse leggi; ma ne' corpi elastici, quando si comprimono è di mestieri, che vengano distratte, o compresse le fibre elastiche; dunque devesi, per vostra sentenza, parte della forza impiegare; ma le velocità, tanto avanti quest' azione, quanto dopo, son le medesime e ne' corpi elastici, e ne' molli; dunque se in quelli la contusione consuma parte della forza primitiva, dee consumarla anche in questi.

Che se voi volete un altro genere di comunicazione di movimento, congiungete con una corda elastica due corpi, a' quali date due velocità o cospiranti, o contrarie per modo, che la velocità relativa sia velocità di discostamento. Per mezzo della corda elastica, che li unisce, si farà la comunicazione di movimento con due azioni; nella prima delle quali la corda verrà distratta; nell'altra, contraendosi la corda, cangerà la velocità comune a due corpi. La prima azione si fa secondo le leggi de' corpi inerti, l'altra secondo le leggi degli elastici. Fermiamoci nella prima. Chi dirà, che nell'allungare la corda elastica niuna forza impiegar si debba? Ma se in essa s' impiega forza, bisogna, che se ne spenda ancora nella contusione de' corpi inerti, perchè si distribuiscono le velocità, e per conseguenza le forze nella stessa maniera.

C. E perchè non si potrebbe dire anche in questo caso, che quella stessa forza, che s'impiega nella compressione, o distrazion delle fibre, s'impiega altresì nella comunicazione del movimento?

L. Voi ricantate la medesima cantilena, ma sempre senza profitto. Ditemi. La corda elastica, poichè è terminata la prima azione, nella comunicazione del movimento si trova ella distratta sì, o nò?

C. Nissun vi niega, che non sia suggetta ad una distrazione determinata.

L. Se così è; parte della forza primitiva, residente ne' due corpi, s'è impiegata a vincere l'azion dell'elasticità della corda, s'è trasferita da' corpi, in cui risiedeva, nella corda, e di viva è passata in morta. S'ella non risiede più ne' corpi, ma

nella

nella corda, come mai volete, che si comunichi da un corpo all'altro? Egli è vero, che finita la prima azione la corda si contrae, e fa cangiamento nella velocità de' corpi. Ma già entriamo nella seconda azione, la quale non fa punto al nostro proposito.

N. Di fatto se parte della forza primitiva non fosse passata da' corpi nella corda, come potrebbe, contraendosi, far nascere nuova forza? essendo assioma in fisica ricevuto, e confermato dalla sperienza, che tanta forza fa nascere una corda, contraendosi, quanta se n'è spesa, ed impiegata nel distrarla. Laonde è necessario, che nella prima azione parte della forza passi di viva in morta, e nella seconda quella, ch'era morta, torni a rivivere.

L. Tronchiamo omai le parole, e per mettere nel suo lume la presente ragione, riduciamo la cosa alla netta, e precisa idea della forza viva, la quale è una facoltà d'agire con una determinata azione contro all'azione della forza morta, a cui però dev'esser proporzionale. Fingiamo ora, che il corpo A, seguendo il corpo B, per mezzo d'un elastro, che stringesi, la comunicazione si faccia del movimento, e veggiamo in prima quali conseguenze dalle due contrarie posizioni discendano. Egli è manifesto, che se la forza viva si vuol dalla quantità del movimento misurare, le due azioni, che l'elastro eserciterà contro ai corpi, saranno eguali. La ragion è, perchè ne' due corpi, trovandosi tanta quantità di moto dopo l'urto, quanta prima, è d'uopo, che quanta ne perde il corpo A, tanta n'acquisti il corpo B; ma l'azion dell'elastro contra del corpo A è proporzionale alla forza viva, o sia alla quantità di moto, che perde, l'azion contra del corpo B è proporzionale alla quantità del moto, che acquista; dunque se le forze vive dalle quantità del movimento si misurino, tanta azion' esercita l'elastro contro al corpo A, quanta contro al corpo B. Tornerà la stessa conseguenza, se considereremo le quantità dell'azioni, che nella cartesiana sentenza si vogliono misurare dal tempo. Conciossiachè applicandosi contro all' un corpo, e all' altro la stessa elasticità, ed essendo eguale il tempo dell'applicazione, è necessario, che eguale azione contro all' uno, e all'altro corpo per l'elastro s'eserciti; dunque l'azion di costipazione contra di A è eguale all'azion di dilatazione contra di B. Queste son le conseguenze, che derivano dall'ipotesi cartesiana.

Pas-

Paſſiamo a quelle, che derivano dalla leibniziana, la quale miſura la forza viva colla metà del prodotto della maſſa nel quadrato della velocità. Cotal prodotto, dopo l'urto, è minore, che prima; dunque la forza viva perduta dal corpo A è maggiore di quella, che s'acquiſta dal corpo B; dunque l'azion di coſtipazione contro al corpo A è maggiore dell'azion di dilatazione contra di B. Ciò accordaſi colla conſiderazion dell'azioni miſurate per gli ſpazj; perciocchè ſcorrendo nello ſteſſo tempicello maggiore ſpazio il corpo A, che il corpo B, ne ſegue, che maggior azion di coſtipazione s'eſerciterà contra di A, che di dilatazione contro a B. Queſte ſono le conſeguenze, le quali con evidenza naſcono dalla poſizione leibniziana.

Al preſente inveſtigar ſi vuole, preſcindendo da ogni ſentenza, ſe ſia più conveniente alla natura, che l'elaſtro tanta azione eſerciti contro al corpo A, quanta contro al corpo B; ovvero maggiore contra del primo, minore contra del ſecondo. Se tanta azione di coſtipazione l'elaſtro eſercitaſſe contro al corpo A, quanta di dilatazione contro al corpo B, non ſi potrebbe ſpiegare, come compiuta cotal'azione l'elaſtro ſi trovaſſe coſtipato, e però valevole d'eſercitare una novella azione di dilatazione; perciocchè l'elaſtro è valevole d'eſercitare, dilatandoſi, quell'azione, che ha eſercitata nel chiuderſi; dunque deveſi dire, che maggior azione eſercita contro al corpo A, che contro al corpo B; perchè in queſta maniera, eſſendo maggiore l'azion di coſtipazione, che di dilatazione, dee neceſſariamente rimaner nell'elaſtro coſtipato una facoltà d'eſercitar tant'azione di dilatazione, quant'è la differenza delle due azioni poco dianzi conſiderate. Queſt'è la fortiſſima conghiettura, che i leibniziani promovono in favore della loro opinione. Voi conſideratela attentamente, e datele quel peſo, che merita.

N. In quella maniera, onde agiſce l'elaſtro, deve agire la tenacità, la coerenza delle parti, e la frizione ne' corpi perfettamente molli; con queſto ſol divario, che in virtù di queſte, le parti compreſſe non ritornano, ſiccome per la forza elaſtica, alla primiera figura. Quanto a' corpi poi, che ſi vengono incontro, è chiaro, che eſſendo l'una, e l'altra azione di coſtipazione, amendue perdono forza, e la perdita è proporzionale all'azione eſercitata.

L. Quì torna in acconcio di diſaminare una novella quiſtione, ſe dopo amendue l'azioni, che intervengono ne' corpi perfettamente elaſtici, ſi ritrovi la ſteſſa quantità di forza, che in eſſi riſiedeva prima dell'urto.

C. Non mi ſembra la quiſtione nè difficile, nè importante. Se per voi ſi domandaſſe, ſe dopo l'intera comunicazione del movimento ne' corpi inerti, o imperfettamente elaſtici la forza, che in eſſi riſiede, ſia minore della primitiva, la quiſtione ſarebbe degna di ſeria diſcuſſione; ma queſta non ſarebbe diverſa da quella, ch'abbiam trattata ſin ora, cioè a dire, ſe nella contuſione ſi conſumi forza, o nò. Ma che ne' corpi elaſtici perfettamente la forza, ſia la medeſima tanto avanti l'urto, quanto dopo l'urto, ſembra evidentiſſimo. Perchè o nella contuſione s'impiega forza, o non vi s'impiega: ſe nò; dunque ſiccome negli altri generi di corpi, così anche ne' perfettamente elaſtici la forza è la medeſima tanto avanti, quanto dopo l'urto: ſe parte della forza primitiva nella contuſione paſſa di viva in morta, ſebbene nulla parte ne' molli, ed una parte ſolo negli imperfettamente elaſtici, ſi reſtituiſce, o torna a rivivere; pure negli elaſtici perfettamente tutta la forza, ch'eraſi nella contuſione impiegata, interamente rinaſce; dunque tanto avanti, quanto dopo l'urto è la ſteſſa.

L. Ho ſommo piacere, che per voi ſi ſtabiliſca, come un principio indubitato, che ne' corpi perfettamente elaſtici la forza dev'eſſere la medeſima tanto innanzi, quanto dopo l'urto. Io nella mia ſentenza vi farò chiaramente vedere, che ciò ſi verifica. Ed eccone il calcolo. Poſti i corpi A, B, che viaggino colle velocità V, u, la ſomma delle forze prima dell'urto ſarà $= \frac{AV^2 + Bu^2}{2}$. La velocità del corpo A dopo l'urto $= \frac{AV + 2Bu - BV}{A + B}$. Quella poi del corpo B $= \frac{Bu + 2AV - Au}{A + B}$; ſiccome è già ſtato ſtabilito; dunque la ſomma delle due forze appreſſo l'urto ſarà =

$$A \cdot \frac{\overline{A^2V^2 + 4ABVu - 2ABV^2 + 4B^2u^2 - 4B^2Vu + B^2V^2}}{2 \cdot \overline{A + B}^2}$$

$$+ B \cdot \frac{\overline{B^2u^2 + 4ABVu - 2ABu^2 + 4A^2V^2 - 4A^2Vu + A^2u^2}}{2 \cdot \overline{A + B}^2};$$

la

la qual lunghiſſima formula, facendo l'attual multiplicazione, ed eſponendola innanzi agli occhi in una maniera più commoda a maneggiarſi, prenderà il novello aſpetto

$$\frac{\begin{array}{lll} A^3V^2 & +\,4A^2BVu & +\,4AB^2u^2 \\ -\,2A^2BV^2 & -\,4AB^2Vu & +\,B^3u^2 \\ +\,AB^2V^2 & +\,4AB^2Vu & -\,2AB^2u^2 \\ +\,4A^2BV^2 & -\,4A^2BVu & +\,A^2Bu^2 \end{array}}{2\cdot\overline{A+B}^2}$$

ovvero $\dfrac{AV^2 \cdot \overline{AA+2AB+BB} + Bu^2 \cdot \overline{AA+2AB+BB}}{2\cdot\overline{AA+2AB+BB}} =$

$\dfrac{AV^2 + Bu^2}{2}$; ſiccome dovevaſi dimoſtrare. Queſto teorema è ſtato primamente dimoſtrato dal Signor Criſtiano Ugenio, cioè che la ſomma de' quadrati della velocità per la maſſa ne' corpi perfettamente elaſtici tanto prima, quanto dopo l'urto ritrovaſi eguale. Io ho ſalvato nella mia ſentenza il principio, che voi pure riconoſcete per vero; ſalvatelo voi nella voſtra.

C. Non ſi è dimoſtrato da mille autori, che le quantità del movimento ſon le medeſime tanto prima, quanto dopo l'urto? e per le quantità del movimento i carteſiani eſprimono le forze.

L. Di grazia fatemi il calcolo, perchè io ſon uomo, che poco all'altrui autorità deferiſce, moltiſſimo al raziocinio, ed alla ragione dimoſtrativa.

C. Io comincio ad entrare in ſoſpetto, che per rilaſſar l'animo vi vogliate prender giuoco di me.

L. Riſpondetemi pur ſul ſerio, che vi dò parola, che ſul ſerio io parlo.

C. Eccovi il calcolo, ſe il volete molto più ſemplice, e ſpedito, che non è il voſtro. La forza innanzi all'urto ſarà $= AV + Bu$. Quella dopo l'urto $= \dfrac{A^2V + 2ABu - ABV}{A+B}$ $+ \dfrac{B^2u + 2ABV - ABu}{A+B} = \dfrac{A^2V + ABu + B^2u + ABV}{A+B} =$ $AV + Bu$; ſiccome ſi dovea dimoſtrare. Eccovi ſoddisfatto a pieno.

L. E pur non lo sono; perchè se la direzione del corpo B sarà opposta, e contraria alla direzione del corpo A, la sua velocità $= u$ sarà negativa; onde mutando il segno, le due formule tanto prima, quanto dopo l'urto saranno AV − Bu. Questo non è prender la somma delle due forze esistenti ne' corpi A, B, ma la differenza, e pur abbiamo stabilito, che la somma dev'esser eguale. Fatemi dunque vedere, che anche quando le velocità son contrarie, la somma delle due forze innanzi, e appresso l'urto sia eguale.

C. Voi mi fate un'intima irragionevole, e ingiusta, ch'io appello al tribunal del buon senso, e della ragione. Egli è certo, che quando le velocità son contrarie, la somma delle due forze, prese alla vostra foggia, non è la stessa prima, e dopo l'urto. Ma io sostengo, e il buon senso lo vuole, che, quando i movimenti sono contrarj, ad aver la quantità della forza, che si ritrova in natura, non se ne dee prender la somma, ma la differenza; perchè le forze eguali, e contrarie s'elidono l'una con l'altra, ne atte sono a produr verun effetto in natura; onde si deve instituir il calcolo per maniera, che di sì fatte forze eguali, e contrarie non si tenga conto veruno; lo che si fa col sottrarre la minore dalla maggiore, e quel che rimane è atto a produr effetto in natura.

N. Così fatta dottrina è ella a tutti i cartesiani comune?

C. Senza fallo.

N. Sembrami, se non prendo abbaglio, ch'essi abbandonino la dottrina del maestro loro; perchè egli dopo avere stabilito il principio, che si conserva sempre la stessa forza nell'urto de' corpi, ne prende la somma, ancorchè i corpi sieno dotati di contrarie velocità.

C. Cartesio è stato un massimo uomo; contuttociò mostra alcuna volta d'esser uomo soggetto a paralogismi; e noi sappiamo, che da cotai principj guidato, ha prodotte leggi per la comunicazione del movimento, le quali non reggono alla sperienza, e da tutti i suoi seguaci sono riconosciute per false; onde è stato necessario riformar i suoi principj, e, ritenuto quello della conservazion delle forze, cangiar alcun poco la maniera di computarle, prendendone cioè la somma, quando son cospiranti, e la differenza, quando sono contrarie.

L. La necessità di por qualche cangiamento ne' principj del

del Cartefio è evidente. Bifogna veder, fe il cangiamento adoprato da' fuoi feguaci fia giufto. Ho fatto di già vedere effer falfiffimo, che due forze, comechè contrarie, nell' urto s' elidano, e fi diftruggano, concorrendo anzi a fare un maggior effetto. Quando due corpi fi vengono incontro con forze, le quali nell' urto interamente perifcono, vanno effe forfe in niente? Nò; perchè s' efercitano a produrre una contufione tanto maggiore, quanto effe fono maggiori. Se a' leibniziani domanderò qual fia la quantità della contufione, rifponderanno: prendete la fomma delle due forze, e ad effa la ritroverete proporzionale. Ma i cartefiani, che poffono mai dire? La forza per effi è nulla; dunque nulla avrebbe ad effer la contufione, lo che è contrariiffimo alla fperienza; giacchè abbiamo abbaftanza confutata l'erronea opinion di coloro, che penfano la contufione non doverfi noverare tra i veri effetti.

Ma per non ridire il già detto, ricordo folo la fperienza del Sig. s' Gravefande. Due corpi, l'uno di creta, l'altro folido, e terminante in punta, fi vengano incontro con celerità reciproche, effi formano una determinata foffa A. Indi due corpi eguali a quefti, amendue folidi, e acuti urtino nell' argilla fucceffivamente colle fteffe velocità, fprofondando uno la foffa, che ha fatta l'altro, formeranno una feconda foffa B, perfettamente eguale alla A. Abbiamo dunque due effetti eguali A, B. Il fecondo vien prodotto da una cagione, che eguaglia la fomma delle due forze; dunque anche il primo: ma ciò non può verificarfi, quando delle forze contrarie debba prenderfi la differenza; fi verifica ottimamente, quando fe ne prenda la fomma; dunque ec.

C. Ma in quefta fperienza ancor la contufione nel primo cafo farà diretta mezza per una parte, e mezza per l'altra, e però in parte contraria; onde fi potrà dire, ch' una contufione diftrugga l'altra.

N. In fomma, quando fi prende impegno a difendere il falfo, fi fanno ritirate sì mal intefe, che fan pietà. Quando anche la cofa fuffe come la dite, s'avrebbe egli dovuto muover di luogo minor quantità di materia, e vincer minor' azione della refiftenza? Ma poi non vedete, che effendo nel noftro cafo l'un corpo folido, e acuto, l'altro molle, e cedente, la contufione tutta interamente in quefto fi forma, e però fempre alla medefima parte?

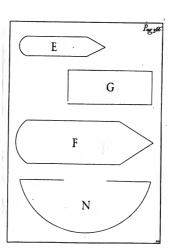
Ma

Ma lasciate, Signore, ch'io aggiunga forza al vostro argomento con una riflessione semplice, e schietta, ch'or ora mi viene in mente. Sieno due corpi, che si vengano incontro con velocità contrarie. La forza loro pei cartesiani è eguale alla differenza delle forze separatamente prese. Urti uno in una corda perfettamente elastica, per la cui azione ritorni indietro, ed acquisti una celerità cospirante alla celerità dell'altro corpo; ed allora la forza loro sarà eguale alle forze de' due corpi separatamente prese, la quale è certamente maggiore della differenza. Domando d'onde mai nasce cotal accrescimento di forze. Dall' azione della corda nò; perchè questa con tanta forza si restituisce, con quanta è stata piegata; dunque si deve dire, che anche prima della restituzione, non la differenza, ma la somma delle forze primitive si debba prendere per aver l'intera quantità delle forze.

L. In somma la verità per tutti i versi torna la stessa. Eccovi un'altra dimostrazion semplicissima, e non dissomigliante alla vostra. Un elastro egualmente chiuso è sempre mai dotato della stessa energia, e per conseguenza aprendosi, dee comunicare egual quantità di forza viva. Si appoggi prima ad un sostegno immobile, e si apra tutto ad una parte, comunicando forza ad un globo A; indi s'appoggi a due globi B, C, eguali ciascuno alla metà del globo A; si aprirà l'elastro per modo, che comunicherà forze eguali all'uno, ed all'altro, ma dotate di direzioni contrarie. La quantità delle forze dunque, secondo la misura de' cartesiani, dee riputarsi nulla. E come mai può essere, che un elastro, spandendosi, ed esercitando sempre mai la stessa azione, ed energia, ora comunichi forza determinata, ed or nulla? Devesi dunque prender la somma, e non la differenza delle due forze separate ad aver la quantità della forza intera.

N. Dopo così fatte riflessioni non è leggiero il momento dell'esempio de' Signori Ermanno, e Rictero. Sia il globo A dotato di due gradi di velocità, il quale urti in un globo B $= 3$ A posto in quiete. Gli comunicherà la velocità $= 1$, ritornando egli indietro colla stessa velocità. La forza dunque del globo A s'è distribuita in due masse 3 A, ed A, le quali camminano con un grado di velocità; dunque la forza di A innanzi all'urto, sarà alla forza di A dopo l'urto, come $3A + A : A :: 4 : 1$, cioè in ragion duplicata delle velocità.

La

Pag. 366.
E
G
F
N

La stessa conseguenza ritornerà, se porremo il globo A dotato di tre gradi di velocità urtare nel corpo B = 5 A; perciocchè gli comunicherà un grado di velocità, ritornando egli indietro con due. Urti di bel nuovo nel corpo C = 3 A; gli darà similmente un grado di velocità, ritornando egli indietro con uno; onde la forza del corpo A s'è distribuita a' corpi 5 A, 3 A, A, dotati tutti d'un grado di velocità; onde la forza del corpo A, prima degli urti, sarà alla sua forza appresso gli urti, come 5 A + 3 A + A : A : : 9 : 1, cioè in ragion duplicata delle velocità.

Anzi generalmente ritroverò, che se il corpo A ha quattro gradi di velocità, distribuirà la sua forza ai corpi 7 A, 5 A, 3 A, A, e così di mano in mano: ritrovandosi una curiosa analogia tra quest'esempio, ed i corpi dotati di gravità, che sono in alto gittati, siccome voi medesimi vedete.

C. Io credo, che questa materia della comunicazione del movimento, che non ha domandato picciolo spazio alla sua disamina, sia interamente esaurita, ne altro vi rimanga che dire.

L. E pure non è interamente compiuta. Resta da esaminare ancora una particolar legge della comunicazione del movimento, che si fa per mezzo d'un vette, di cui nel quarto tomo delle sue opere ha parlato il Sig. Giovanni Bernoulli. Poscia dobbiamo esaminare gli urti indiretti, e la comunicazione di movimento, ch'indi risulta sì ne' corpi molli, come negli elastici. Finalmente ci convien ponderare la forza dell'argomento tante volte prodotto dagli antileibniziani della resistenza, che patiscono i solidi viaggianti in mezzo a' fluidi, la quale per loro avviso dovrebbe esser nella nostra sentenza, siccome i cubi delle celerità.

C. La materia è vasta, l'ora s'avanza, la mente per l'applicazione è stanca; onde, se piace a voi, giudicherei di differirla ad un'altra giornata.

L. Aggiungete ancora, la voglia vien meno. Contuttociò quel, che piace a voi, a me ancora piace; anzi nel tempo di mezzo, potrete amendue e leggendo, e meditando, mettervi al possesso della materia, e venir più apparecchiati al congresso.

GIOR-

GIORNATA UNDECIMA.

INTERLOCUTORI.

Lelio, *Cesare*, *Nestore*.

L. BEne arrivati, o Signori. Convien dire, che molto serj, e ponderosi sieno i vostri ragionamenti ; mentre senza quasi restituirmi il saluto, seguitate a favellar tra voi con impegno.

C. Andavamo considerando, siccome non può recar maraviglia, che nella controversia delle forze vive si sieno in due fazioni divisi non che gli uomini, ma le nazioni medesime, essendo gli argomenti fortissimi e per l'una parte, e per l'altra.

N. Io ho sempre inteso a dire, e la sperienza me l'ha insegnato parecchie volte, che chiunque ha la buona sorte d'incontrare la verità, per qualunque banda la miri, sempre gli si discuopre più chiara, e tutte le cose concorrono a manifestargliela vie più, onde spiega con somma facilità tutti gli effetti, le conseguenze, e i fenomeni, ch' indi nascono. Ma mentre riguardo la controversia delle forze vive, la cosa non è così. S' io mi rivolgo alla maniera di comunicazion di movimento considerata dal Sig. Bernoulli, parmi, che si confermi la sentenza del Leibnizio : se io osservo la resistenza, che patiscono i corpi solidi, viaggianti per mezzo ai fluidi, la quale deve prossimamente essere, siccome il quadrato della velocità, parmi, che la sentenza cartesiana sia vera : onde ne l'una, ne l'altra io veggio interamente marchiata col carattere della verità.

L. Comunque sia sempre vero, che la verità sia feconda di bellissime conseguenze, per cui prontamente si spiegano fenomeni, che prima si credeano difficilissimi ; pure non rade volte addiviene, che una qualche opposizione non si possa risolvere interamente, dipendendo da altre verità, che ci sono sconosciute. Ne perciò la verità si vuol richiamare in dubbio, quando ella sia ben provata, e con forti ragioni munita ; ma si vuol aspettare la soluzione della difficoltà da altro maggior lume, che è necessario. Della qual cosa potrei io recare in mezzo moltissimi esempj ; ma un solo sarà bastante. Qual cosa più

più certa delle leggi idroftatiche? Pure per quanto fia ftato fcritto, non s' è finora fciolta bene l' oppofizione de' tubi capillari, e d' altri fenomeni di fomigliante natura, ne' quali i liquori chiufi dentro i cannelli ftanno fofpefi fopra il livello del liquore intorno ftagnante. Ne per quefto v' ha chi richiami in dubbio le verità idroftatiche, che fono abbaftanza provate; vedendofi, che il fenomeno de' tubi capillari dipende da qualche altra caufa, che ancor c' è ignota.

C. Convien dire, che l' argomento dedotto in favore de' cartefiani dalla refiftenza de' fluidi vi dia molto da penfare.

L. Non tanto, quanto v' immaginate. Per altro il mio parlare a tutto altro fine diretto potrebbe ancor far vedere, che poco fidar ci dobbiamo di certi argomenti, la cui forza tutta fi fonda nell' ofcurità della cofa, da cui fi prendono. E qual cofa è più ofcura della refiftenza de' fluidi contra de' folidi, le cui leggi fono così recondite, che dopo lungo ftudio, e molte meditazioni d' uomini profondiffimi fi giacciono ancor nelle tenebre. Onde febbene io non fapeffi quell' oppofizione rifolvere, non abbandonerei l'opinion, ch' ho abbracciata, confiderando quella come una difficoltà, che domanda molti altri lumi per effere rifchiarata. E quefte fono le vere, e reali leggi del buon metodo: ed a me è fempre fofpetta un' opinione, che per foftenerfi va in traccia d' argomenti ofcuri, e dedotti da cofe incerte, e intricate.

N. Ma lafciamo omai così fatto difcorfo, che per altro ha il fuo vero, ed entriamo a difcutere le materie, che ci abbiamo propofte. Volete voi dar principio dalla maniera bernoulliana di comunicar il moto per via d' un vette?

L. Sarà bene. A quefto fine mi fervirò del metodo di foftituir maffa a maffa, di cui alcuni giorni fono abbiamo fatta lungamente parola. Laonde per quanto al mio propofito s' appartiene, ve ne ridurrò alla memoria fuccintamente le leggi.

Sia un vette mobile intorno al punto C (*Fig.* 1), cui fia legato in B un corpo B fpogliato affatto di gravità, e nel punto A fia applicara una forza DA, che agifca con direzione perpendicolare al braccio del vette. Quefta forza chiamifi $= f$. Egli è dimoftrato, che dovendo le forze equivalenti applicate al vette effere in ragion reciproca delle diftanze dal centro del moto, il momento della forza f nel punto B è $=$

 $f . AC$

$\frac{f.AC}{BC}$. Ecco dunque qual sia la forza motrice al punto B; la qual forza motrice se dividasi per la massa del corpo $B = m$, avremo la forza acceleratrice $= \frac{f.AC}{m.BC}$; e se questa dividasi per la distanza BC, avremo la forza acceleratrice angolare $= \frac{f.AC}{m.BC^2}$.

Qualunque volta le forze acceleratrici angolari sono eguali, il pendulo sarà isocrono, e il moto seguirà nello stesso tempo. Ora levato il corpo B si ponga un altro corpo in E parimente privo di gravità, e chiamata n la massa del corpo E, si ritroverà la forza acceleratrice angolare per rapporto ad esso $= \frac{f.AC}{n.CE^2}$; dunque eguagliando queste due forze acceleratrici angolari, si avrà $\frac{f.AC}{m.BC^2} = \frac{f.AC}{n.EC^2}$, e perchè la forza f, e la distanza AC rimane sempre la stessa, avremo $m.BC^2 = n.EC^2$; dunque allora avremo le forze acceleratrici angolari eguali, e per conseguenza isocroni i movimenti, quando le masse de' corpi sieno in ragion reciproca duplicata dalle distanze dal centro.

Quindi ricavate una conseguenza, ch'è la base, ed il fondamento di tutto il resto: che se in luogo del corpo B porrò in A un corpo, ch'abbia a B quella stessa ragione, che ha il quadrato BC al quadrato AC, verrà prodotta quella stessa velocità angolare, che stata sarebbe prodotta nel corpo B.

N. Sembrami, che da così fatti principj dedur si possa un elegante teoria del centro d'oscillazione. Vedrò, se mi riesce di spiegar ciò, che il pensiero confusamente mi detta. Sia un pendulo composito di due corpi A, B (*Fig* 2), che gira intorno al punto C. Concepiamo i corpi spogliati di gravità, la quale concepiremo raccolta nel centro delle masse K. In luogo di A si sostituisca in K un corpo $= \frac{A.AC^2}{KC^2}$, ed in luogo di B un corpo $= \frac{B.BC^2}{KC^2}$: surrogati questi corpi in K non si muta niente la forza, nè la celerità angolare; dunque la

massa

massa raccolta in K sarà $\frac{A.AC^2 + B.BC^2}{KC^2}$. Per ritrovare la forza acceleratrice si chiami la gravità del corpo $A = gA$, e quella del corpo $B = gB$. La forza acceleratrice ognun sa, esser eguale alla forza motrice divisa per la massa; dunque se la forza motrice applicata al punto K, si divida per la massa nello stesso punto applicata, avremo la forza acceleratrice $= \frac{\overline{gA + gB}.KC^2}{A.AC^2 + B.BC^2}$. Ma è noto, che due penduli semplici allor sono isocroni, quando le forze acceleratrici sono in ragion diretta delle lunghezze; dunque chiamata $= x$ la lunghezza del pendulo, che vien animato dalla natural gravità, la cui forza acceleratrice sarà $= g$, avremo l'analogia $\frac{\overline{gA + gB}.KC^2}{A.AC^2 + B.BC^2} : g$, ovvero $\overline{A + B}.KC^2 : A.AC^2 + B.BC^2 :: KC : x = \frac{A.AC^2 + B.BC^2}{\overline{A + B}.KC}$; la formula è stata ritrovata sin dall'Ugenio.

L. Voi siete pronto, e ingegnoso nel dedurre le conseguenze. Questo stesso metodo appunto ha insegnato il Sig. Bernoulli nel luogo citato. Ma proseguiamo il nostro discorso, e venendo a quel, che c'importa, entriamo a parlare della comunicazione del moto per mezzo d'un vette.

Si concepisca un vette mobile intorno al punto C, ch'abbia annesso il corpo B (*Fig.* 3) spogliato affatto di gravità, il quale o si muova, o stia fermo. Contro ad esso venga ad urtare direttamente il corpo A: egli è cosa chiara, che la comunicazione del movimento si farà nella stessa guisa, in cui si farebbe rimosso il vette, e che compiuto l'urto il corpo B circolerà con quella stessa velocità, che avrà acquistata nell'urto. Non ripeto le formule, ch'abbiamo ne' dì passati vedute.

Convien però supporre, che l'urto sia diretto, e diretto si mantenga in tutto il tempo dell'azione; perciò quantunque questa richieda tempo, e tempo finito; pure noi supporremo una così pronta elasticità, onde l'urto in un tempo infinitesimo interamente si compia, perciocchè, non cangiandosi in tal guisa la direzione del corpo B, l'urto si mantiene sempre diretto. E questo nel progresso lo supporremo mai sempre.

Se noi porremo mente al modo, onde ſi fa cotale comunicazione di movimento, vedremo, che coſtipandoſi inſieme le parti de' due corpi, che urtanſi, vengono eſſi ad eſſer coſtituiti in mezzo a due forze morte agenti, le quali maneggiate a dovere co' canoni delle forze continuamente applicate ci daranno, compiuta l' azione, quelle velocità, che ſi cercano. Laonde noi poſſiamo concepire un elaſtro MN appoggiato al vette, il quale reſtando coſtipato dai corpi, faccia quell' effetto contra di lui, che farebbe una potenza morta allo ſteſſo punto applicata. Se l' elaſtro è applicato al punto B, le velocità, che ſi ottengono dopo l' urto, ſon quelle ſteſſe, che ſi avrebbero rimoſſo il vette. Ciò ſuppoſto

Sia il vette CK (*Fig.* 4), ch' abbia anneſſo il corpo B, ed il corpo A venga ad urtare direttamente il punto K, muovendoſi il vette con qualunque celerità. Chiudendoſi l' elaſtro, che ſupponeſi applicato al punto K, viene ad eſercitare una forza motrice contra del vette applicata in K, che sforzaſi di muovere il corpo B; dunque ſe ſoſtituirò in luogo di B nel punto K un corpo $= \frac{B . BC^2}{KC^2}$, l' elaſtro produrrà nel vette la ſteſſa celerità angolare, come ſe vi fuſſe il ſolo corpo B, e così ſempre, finchè fornita ſia la comunicazione del movimento. Ma note ſon le leggi della comunicazione del movimento nell' urto de' due corpi A, e $\frac{B . BC^2}{KC^2}$; dunque computando ſi troverà la velocità del corpo B dopo l' urto. Il computo non è difficile.

Si chiami la velocità del corpo $B = u$, quella del corpo $A = V$. Si metta $\frac{B . BC^2}{KC^2} = K$, e la velocità di $K = x$; onde avremo $x = \frac{u . KC}{BC}$, dovendo eſſer eguali le velocità angolari. Queſte denominazioni appartengono alle velocità innanzi all' urto. Appreſſo l' urto ſe l' elaſtro non ſi reſtituiſſe, ma i corpi camminaſſero in qualità di perfettamente molli, la velocità comune tanto al corpo A, quanto al corpo K ſarà $= \frac{AV + Kx}{A + K}$, e ſurrogato il valor di K, e di x ſarà =

AV

$$\frac{AV + \frac{B.BC}{KC}.u}{A + \frac{B.BC^2}{KC^2}} = \frac{A.V.KC + B.u.BC}{A.KC + \frac{B.BC^2}{KC}} = \frac{KC.\overline{A.V.KC + B.u.BC}}{A.KC^2 + B.BC^2}.$$

Per ritrovare la velocità di B, si faccia come la velocità di K alla velocità di B :: KC : BC, dovendo esser eguali le velocità angolari; dunque la velocità di $B = \frac{BC.\overline{A.V.KC + B.u.BC}}{A.KC^2 + B.BC^2}$: come si dovea ritrovare.

N. Le quantità del movimento in questo genere di comunicazione sono esse eguali sì, o no? Quantunque le formule sieno lunghissime pure mi sembrano esser in guisa constituite, onde non sarà difficile il calcolo. La quantità del moto dopo l'urto sarà $\frac{\overline{A.KC + B.BC}.\overline{A.V.KC + B.u.BC}}{A.KC^2 + B.BC^2}$, la qual dobbiam vedere, se sia eguale ad $AV + Bu$ quantità del moto prima dell'urto. Supponghiamo cotal' egualità, e liberandoci dalla frazione coll'attual multiplicazione, avremo

$A^2.V.KC^2 + A.B.u.KC.BC + A.B.V.KC.BC + B^2.u.BC^2 =$
$A^2.V.KC^2 + A.B\ u.KC^2 + A.B.V.BC^2 + B^2.u.BC^2$, e cancellati i termini, che distruggonsi, e fatte l'opportune trasposizioni, si avrà $V.BC.\overline{KC - BC} = u.KC.\overline{KC - BC}$, e dividendo per $KC - BC$, si avrà $V.BC = u.KC$, cioè le velocità de' corpi A, B prima dell'urto in ragion diretta delle distanze KC, BC. In questo caso solo, e non in altro possono esser eguali le quantità del movimento prima, e dopo l'urto. Ma in caso, che KC sia maggior di BC, se $V.BC > u.KC$, dopo l'urto avranno una quantità di movimento maggiore di prima, e se $V.BC < u.KC$, l'avremo minore. Tutto all'opposito segue, se KC è minor di BC.

C. Veracemente la stessa quantità di movimento prima, e dopo l'urto non si può avere. Ma si avrà egli la medesima quantità di forza viva prima, e dopo l'urto, mettendo a computo ancor quella, che si spende nella compression dell'elastro secondo il vostro metodo? Veggiamolo un poco.

Dal vostro raziocinio segue evidentemente, che l'elastro posto

posto in K rimarrà egualmente compresso, o alla leva sia unito il corpo B, o il corpo $K = \frac{B.BC^2}{KC^2}$. Dunque la medesima forza si dovrà e nell' un caso, e nell' altro nella contusione impiegare. Questa se vi fosse il corpo K, secondo la dottrina per voi stabilita, sarebbe $= \frac{A.K.\overline{V-x}^2}{2.\overline{A+K}}$. Sostituendo il valor di K, e di x, sarà la forza nella contusione impiegata $= \frac{A.B.BC^2}{2.KC^2} . \frac{\overline{V-u.\frac{KC}{BC}}^2}{A+\frac{B.BC^2}{KC^2}} = \frac{A.B.BC^2.\overline{V.BC-u.KC}^2}{2.BC^2.\overline{A.KC^2+B.BC^2}} =$ $\frac{A.B.\overline{V.BC-u.KC}^2}{2.\overline{A.KC^2+B.BC^2}}$. Ritrovata la forza nella contusione impiegata, ritroviam le forze de' corpi A, B dopo l' urto: la forza del corpo $A = \frac{A.KC^2.\overline{A.V.KC+B.u.BC}^2}{2.\overline{A.KC^2+B.BC^2}^2}$: del corpo $B = \frac{B.BC^2.\overline{A.V.KC+B\ u.BC}^2}{2.\overline{A.KC^2+B.CB^2}^2}$. Prendendole dunque tutte e tre insieme deve risultare la forza primitiva $\frac{A.V^2+B.u^2}{2}$. Veggiamo se ciò sia vero

$$\frac{\overline{A.KC^2+B.BC^2}.\overline{A.V.KC+B.u.BC}^2}{2.\overline{A.KC^2+B.BC^2}^2} + \frac{A.B.\overline{V.BC-u.KC}^2}{2.\overline{A.KC^2+B.BC^2}} =$$

$$\frac{\overline{A.V.KC+B.u.BC}^2 + A.B.\overline{V.BC-u.KC}^2}{2.\overline{A.KC^2+B.BC^2}} =$$

$$\frac{\begin{array}{l} A^2.\ V^2.KC^2+2A.B.V.u.KC.BC+B^2.\ u^2.BC^2 \\ A.B.V^2.BC^2-2A.B.V.u.KC.BC+A.B.u^2.KC^2 \end{array}}{2.\overline{A.KC^2+B.BC^2}} =$$

A.V

$\frac{\overline{A.V^2 + B.u^2} \cdot \overline{A.KC^2 + B.BC^2}}{2 \cdot \overline{A.KC^2 + B.BC^2}} = \frac{A.V^2 + B.u^2}{2}$. Avete ragione, la teoria torna fecondo i voftri difegni.

L. Non v' era d' uopo di calcoli sì proliffi per ricavar quefta confeguenza. La forza de' due corpi A, K dopo l' urto infieme con quella, che s' è impiegata nella contufione, è eguale alla forza de' corpi A, K innanzi all' urto: ma la forza del corpo K eguaglia quella del corpo B tanto prima, quanto dopo l' urto; perchè effendo $K : B :: BC^2 : KC^2$: di più $u : x :: BC : KC$, o fia $u^2 : x^2 :: BC^2 : KC^2$, farà $K : B :: u^2 : x^2$; dunque $\frac{K.x^2}{2} = \frac{B.u^2}{2}$; lo fteffo raziocinio vale ancora delle velocità appreffo l' urto; dunque la forza de' corpi A, B prima dell' urto eguaglia la forza de' corpi A, B dopo l' urto infieme con quella, che fi è nella contufione impiegata, la quale effendo la medefima o il corpo A agifca contro al corpo K, o contro al corpo B, ne feguita ciò, che avete con lungo calcolo dimoftrato.

Stabilito ciò, che accade ne' corpi molli paffiamo agli elaftici; e bafterà parlare de' perfettamente elaftici, comunque il calcolo fi poteffe adattare non difficilmente a' corpi d' imperfetta elafticità dotati.

N. Vi folleverò, fe vi piace, dalla fatica, e dalla noja, che fuole i lunghi calcoli accompagnare. Lafciate, che mi metta fotto degli occhj codefte formule, che avete innanzi. Ritenute le fteffe denominazioni fi fa, che la velocità del corpo A appreffo l' urto farà $= \frac{AV + 2Kx - KV}{A + K}$, e quella del corpo K farà $= \frac{Kx + 2AV - Ax}{A + K}$: ma $KC : BC :: \frac{Kx + 2AV - Ax}{A + K}$: alla velocità del corpo B dopo l'urto, la qual farà $= \frac{BC}{KC} \cdot \frac{Kx + 2AV - Ax}{A + K}$. Dunque foftituendo i valori di K, x nelle due formule, la velocità di A dopo l' urto farà $= \frac{AV + \frac{2Bu \, . \, BC}{KC} - \frac{B.V.BC^2}{KC^2}}{A + B . \frac{BC^2}{KC^2}} =$

A.V. .

$\frac{A.V.KC^2 + 2B.u.BC.KC - B.V.BC^2}{A.KC^2 + B.BC^2}$. La velocità poi di B compiuto l' urto, si troverà $= \frac{BC}{KC} . \frac{B.u.\frac{BC}{KC} + 2A.V - A.u.\frac{KC}{BC}}{A + \frac{B.BC^2}{KC^2}} =$

$\frac{BC}{KC} . \frac{B.u.BC^2 + 2A.V.KC.BC - Au.KC^2}{A.KC.BC + B.\frac{BC^3}{KC}} =$

$\frac{B.u.BC^2 + 2A.V.KC.BC - A.u.KC^2}{A.KC^2 + B.BC^2}$. Ed eccovi ritrovate le velocità de' due corpi dopo la comunicazione del movimento.

Io son sicuro, che le quantità del movimento prima, e dopo l' urto non saranno eguali: pure domandiamolo al calcolo. Moltiplicando la velocità di A per A, e quella di B per B, otteremo.

$$\frac{\begin{array}{ll} A^2.V.KC^2 & + 2A.B.u.BC.KC \\ - A.B.V.BC^2 & - A.B.u.KC^2 \\ + 2A.B.V.KC.BC & + B^2.u.BC^2 \end{array}}{A.KC^2 + B.BC^2}$$ quantità del moto

dopo l' urto, che dobbiamo osservare, se eguale sia ad AV + Bu quantità del moto prima dell' urto. Supponendo tal' egualità, e multiplicando pel divisore, avremo

$$\begin{array}{lll} A^2.V.KC^2 & + 2A.B.u.BC.KC & A^2.V.KC^2 + A.B\,u.KC^2 \\ - A.B.V.BC^2 & - A.B.u.KC^2 & = + A.B.V.BC^2 + B^2.u.BC^2 \\ + 2.A.B.V.KC\,BC + B^2.u.BC^2. & & \end{array}$$

Cancellati i termini, che distruggonsi, e fatta la divison per AB, e trasportati i termini a dovere, si avrà $V.BC.\overline{KC - BC} = u.KC.\overline{KC - BC}$, e fatta la divisione per KC − BC, si ritroverà $V.BC = u.KC$, la qual dinota non poter esser eguale la quantità del movimento prima, e dopo l' urto, se non sia $V : u :: KC : BC$.

C. A

C. A bell' agio, che vi è errore ſicuramente nel calcolo; ne me ne ſono avveduto, quando ſi parlava de' corpi molli.

L. Non crederei, perchè l' ho fatto in particolare, e riveduto più d' una volta, ed ora l' ha il Sig. Neſtore rifatto, e ſempre ſon tornate le medeſime conſeguenze. Pure io ſoglio dire, che un genere ſolo di perſone non isbaglia ne' calcoli, cioè quello, che non calcola mai.

C. Oſſervate: non può verificarſi, che le quantità del moto ſieno eguali prima, e dopo l' urto, ſe non ſia $V.BC = u.KC$; dunque nell' ipoteſi, che $BC = KC$, non ſaranno eguali, ſe non ſia $V = u$. Ma queſta conſeguenza è falſa; perciocchè ſiccome i giorni paſſati abbiamo ſtabilito, nell' ipoteſi di $BC = KC$ qualunque ſieno le velocità, le quantità del movimento ſono eguali prima, e dopo l' urto; dunque vi è errore, e non eſſendovi nella teoria, non ne ſarà libero il calcolo.

L Acutamente, ma non ſecondo la verità. Voi vi ſiete dimenticato, che nel progreſſo del calcolo abbiamo fatta la diviſione per $KC - BC$, la qual quantità in ipoteſi di $KC = BC$ vien ad eſſere $= 0$; quindi la ſteſſa quantità, moltiplicando tanto $V.BC$, quanto $u.KC$, vien ad eguagliare queſte due quantità, quantunque ineguali; e però le quantità del moto prima, e dopo l' urto nella predetta ipoteſi ſono eguali mai ſempre. Da quì naſce, che nell' ipoteſi di $KC > BC$, ſe $V.BC$ è $>$ di $u.KC$, la quantità del moto dopo l' urto ſarà maggiore che prima; ſarà minore, ſe $V.BC < u.KC$. Tutto all' oppoſito nell' ipoteſi di $KC < BC$, ſe $V.BC > u.KC$, la quantità del moto dopo l' urto ſarà minore che prima; ſarà maggiore, ſe $V.BC < u.KC$; la qual coſa ſi è notata ancora, dove de' corpi molli ſi è tenuta parola. Laonde ſe $KC = BC$ la quantità del moto dopo l' urto non ſarà ne maggiore, ne minore di prima. Vedete dunque, che il calcolo andava bene; ma queſta volta non avete ſaputo intendere il ſuo linguaggio.

N. A far vedere, che le forze vive alla foggia leibniziana computate ſono nella comunicazione del movimento, di cui parliamo, eguali avanti all' urto, e dopo, laſciando i lunghi calcoli, mi ſervirò del voſtro ſempliciſſimo raziocinio. La forza viva, che riſiede ne' corpi A, K è la ſteſſa innanzi, e dopo l' urto; ma la forza viva del corpo K è eguale a quel-

la del corpo B sì prima, come dopo l' urto, ficcome voi avete fatto vedere; dunque la forza viva de' corpi A, B innanzi all' urto, e dopo è la ftessa.

C. Io voglio vedere il calcolo per certificarmi, se col vostro raziocinio s' accorda.

N. Soddisfatevi pure, che quant' a me ho evidenza, ch' ei darà quel, ch' ho detto.

C. Per maggiore facilità chiamo $KC = p$, $BC = q$; dunque $\frac{A\cdot\overline{AVp^2 + 2Bupq - BVq^2}^2 + B\cdot\overline{Buq^2 + 2AVpq - Aup^2}^2}{2\cdot\overline{Ap^2 + Bq^2}^2}$ farà la forza viva appresso l' urto, ed alzando attualmente al quadrato, avremo

$$\frac{\begin{array}{lll} A^3V^2p^4 & +4A^2BVup^3q & +4AB^2u^2p^2q^2 \\ -2A^2BV^2p^2q^2 & -4AB^2Vupq^3 & +B^3u^2q^4 \\ +AB^2V^2q^4 & +4AB^2Vupq^3 & -2AB^2u^2p^2q^2 \\ +4A^2BV^2p^2q^2 & -4A^2BVup^3q & +A^2Bu^2p^4 \end{array}}{2\cdot\overline{Ap^2 + Bq^2}^2}$$

e cancellati i termini, che distruggonsi, farà

$$\frac{\begin{array}{ll} A^3V^2p^4 & +B^3u^2q^4 \\ 2A^2BV^2p^2q^2 & +2AB^2u^2p^2q^2 \\ AB^2V^2q^4 & +A^2Bu^2p^4 \end{array}}{2\cdot\overline{Ap^2 + Bq^2}^2} = \frac{\overline{AV^2 + Bu^2}\cdot\overline{A^2p^4 + 2ABp^2q^2 + B^2q^4}}{2\cdot\overline{Ap^2 + Bq^2}^2}$$

$= \frac{AV^2 + Bu^2}{2}$. Avete ragione il calcolo perfettamente s' accorda, e dà le forze vive avanti, e dopo l' urto eguali.

L. Or che vi fiete certificati della teoria, tempo è, che ne ricaviamo le importantissime conseguenze. Ed in prima, se così vi piace, modificando le nostre formule, trattiamo un caso particolare, che unicamente è stato considerato dall' incomparabile Sig. Giovanni Bernoulli. Supponghiamo, che il vette CK stia in quiete, e che contra di lui venga ad urtare il

il corpo A, ſupponendo e l'uno, e l'altro dotato di perfetta elaſticità. In tal caſo verrà ad eſſere $u = 0$; dunque la velocità del corpo A appreſſo l'urto ſarà $= \frac{A.V.KC^2 - B.V.BC^2}{A.KC^2 + B.BC^2}$, e quella del corpo B ſarà $= \frac{2A.V.KC.BC}{A.KC^2 + B.BC^2}$. Acciocchè il corpo A dopo l'urto rimanga ſenza velocità, è neceſſario, che ſia $A.KC^2 = B.BC^2$; nel qual caſo la velocità del corpo B appreſſo l'urto verrà ad eſſere $= \frac{V.BC}{KC}$.

N. M' accorgo dove va a terminare il diſcorſo. Quì abbiamo il caſo del corpo A, il quale urtando nel vette perde tutta la ſua forza, e interamente la trasfonde nel corpo B. Queſto a puntin ſi verifica nella ſentenza leibniziana, perchè $A.V^2$ eguaglia $\frac{B.V^2.BC^2}{KC^2}$, eſſendo $A.KC^2 = B.BC^2$; ma non così nella carteſiana, perchè $A.KC$ non eguaglia $B.BC$; onde $A.V$ non può eſſere eguale a $\frac{B.V.BC}{KC}$.

L. Non tanto per raccogliere così fatta conſeguenza, la qual per altro è giuſtiſſima, e fortiſſima, quanto per un altro fine ho ridotte le formule dall' univerſale al particolare. Il Signor Leibnizio, diſputando contro al Sig. Papin, ſi ſtudiava di condur la ſentenza carteſiana al moto perpetuo, ſiccome abbiam detto ne' dì paſſati, e ſi ſerviva d'un corpo, il quale dovea ad un altro ineguale tutta la ſua forza comunicare. Conveniva il Papin eſſer aſſurdo il moto perpetuo, ne altro riſpondeva, ſe non che era affatto impoſſibile, che il corpo A trasfondeſſe tutta la ſua forza nel corpo B ineguale; perciocchè ſe A è minore di B, urtandolo torna indietro, ſe maggiore lo ſeguita. Il rifugio era miſerabile; pure ora s' è fatta vedere la maniera, onde può il corpo A tutta la ſua forza comunicare al corpo B maggiore, o minore; baſta che la diſtanza BC ſia alla diſtanza KC in ragion reciproca dimidiata della maſſa B alla maſſa A. Dopo ciò la riſpoſta del Sig. Papin non ha più luogo, ne ſo qual coſa egli avrebbe potuto riſponder al Leibnizio, ſe gli aveſſe meſſo innanzi agli occhi cotal eſempio.

C. E questa è quella maniera, di che avete in una delle scorse giornate parlato: anzi l'avete pur dimostrata, ed ora altro fatto non avete, se non aggiungere le determinazioni precise.

L. Appunto è dessa. Ma lasciando i casi particolari, ritorniamo all'universale. Vi risovvenga, o Signore, siccome per voi l'altro jeri sonosi dedotte le leggi della comunicazione del movimento prima ne' corpi molli, poi negli elastici. Voi avete detto, che la forza primitiva ne' corpi molli, che vengono all' urto, si distribuisce per modo, che chi ne ha più, ne comparte a chi ne ha meno, finchè amendue camminino con eguale celerità, onde la forza prima, e dopo l'urto debb' essere la medesima, non ispendendosene parte alcuna nella contusione. Non è stata questa la vostra dottrina espressa? Ma come si può adattare alla comunicazione del movimento, ch' abbiam per le mani, dove la quantità del movimento, e per conseguenza la forza carteliana dopo l'urto ora è minore, ed ora è maggiore di quella di prima. E l'essere spesse volte maggiore è un caso assai rimarcabile, perchè l'effetto vien ad esser maggiore della cagione. La dove il mio raziocinio, e la mia maniera di ricavar queste leggi dalla forza leibniziana sussiste, e regge ancor nel caso presente, perchè la forza dopo l'urto presa con quella, che s' impiega nella contusione eguaglia esattamente la primitiva.

Lo stesso pur dite de' corpi perfettamente elastici, ne' quali il vostro raziocinio vien meno; il mio cammina con quattro piedi.

C. Non so che dire. I principj, di che vi siete servito vengono concordemente ammessi da amendue le parti; e son ricevuti da tutti quanti i filosofi.

L. Tempo è omai di toccar una corda, che fin ora lasciata abbiamo in riposo sull' istrumento. Nell' urto ordinario de' corpi, noi ritroviamo due leggi, sopra le quali non si disputa, e concordemente vengono riconosciute per vere. L'una si è, che le quantità del movimento, ovvero di direzione, come parla il Bernoulli, è eguale innanzi all' urto, e dopo; l'altra si è, che i quadrati delle velocità prima dell' urto multiplicati nelle masse son sempre eguali a' quadrati delle velocità dopo l' urto nelle masse multiplicati, coll' aggiunta d' una quantità,

tità, che è sempre proporzionale alla quantità di contusione, o d'altro effetto negli stessi corpi prodotto; onde perchè ne' corpi perfettamente elastici così fatto effetto non interviene, l'aggiunta, di che parliamo, si deve omettere. Di queste due leggi una sola si è quella, che dipende immediatamente dalla necessaria eguaglianza tra la cagione, e l'effetto, e che si vuol chiamare la principale; l'altra la dirò accessoria, e verrà determinata dalle circostanze, e dalla particolar maniera di comunicazione di movimento. E quale delle due sarà la principale, e qual l'accessoria? Io osservo, che la proporzion tra la cagione, e l'effetto è una legge inviolabile, e sacrosanta, onde la natura è obbligata di custodirla in tutti i casi, e in tutte le circostanze possibili. Dunque concludo il miglior criterio, per distinguere la legge principale dall'accessoria, è d'esaminare, quale delle due sia immutabile, quale cangiate le circostanze, cangiata maniera di comunicazione di movimento, si mantenga, e sussista; e quella senza dubbio alcuno sarà la principale. Quella legge poi, che non sussiste, e si muta, è infallibilmente l'accessoria, e quella, che non dipende dalla proporzione tra la cagione, e l'effetto. Abbiamo in questo giorno fatto vedere, che nella comunicazione di moto per mezzo d'un vette l'egualità tra la quantità di movimento vien meno, essendo dopo l'urto or maggiore, or eguale, ed or minore di prima; l'altra legge de' quadrati delle velocità nelle masse, se quella forza si computi, che nella contusione, o in altro effetto si spende, ancor in questo genere di comunicazion di moto mantiensi; dunque quella è l'accessoria; questa è la principale, ed esprime la proporzione tra la cagione, e l'effetto; e per conseguenaa la forza viva dev'essere in ragion della massa nel quadrato della velocità.

N. Raziocinio sottile in vero, e ingegnoso, ma altrettanto sodo, e robusto, il quale si fonda su quegli stessi principj, onde avete co' movimenti indiretti dedotto contenersi nella legge degli spazj la misura dell'azione; essendo questa legge la principale, accessoria quella de' tempi. Laonde tutte le riflessioni, ch'avete fatte a quel passo per istabilire i veri principj, si vogliono ancora al presente caso condurre. In somma questa è una controversia metafisica, alla cui risoluzione non

sono

fono baftanti i principj fifici. Rifletto però, che la fteffa conclufione fi farebbe potuta dedurre dalla maniera volgare della comunicazione del movimento coll'aggiunta d'una rifleffione. Due corpi perfettamente elaftici s'urtino, e fi comunichino il movimento; amendue le leggi fuffiftono. Uno d'effi urti in una corda perfettamente elaftica, e ritorni indietro colla fteffa celerità. La quantità del moto, o fia di direzione fi cangia, accrefcendofi, fe i corpi aveano direzioni contrarie, diminuendofi, fe l'avean cofpiranti; ma la fomma de' quadrati della velocità nella maffa refta fempre la fteffa; dunque quefta è la legge principale, e indicante la proporzion degli effetti, e delle cagioni.

L. La cofa è ben provata ancora per quefto mezzo, e fe ne potrebbe qualche altro fomigliante adoprare. Ma la comunicazione per mezzo d'un vette tronca ogni replica, e chiude agli oppofitori ogni ritirata. Avete voi altro da riflettere fopra quefto genere di comunicazione.

N. Parmi, che di così fatto argomento di comunicare il moto per mezzo di leve, ovvero ciò, che è la fteffa cofa, per mezzo di linee rigide, a cui fi fuppongono attaccati i corpi, abbia parlato prima del Bernoulli lo s'Gravefande.

L. Così è. Contuttociò ho amato di feguire più tofto il metodo del primo, che del fecondo; perciocchè il Bernoulli fi ferve de' principj comuni, che non poffono aver eccezione ne pur preffo i cartefiani; la dove lo s'Gravefande ferveſi di principj, che dipendono dalla fentenza leibniziana delle forze vive. Dimoftranfi però e cogli uni, e cogli altri principj le medefime confeguenze. Ma quefta è una nuova confermazione della mia fentenza. Mercechè que' principj, onde fempre fi raccolgono confeguenze vere, e derivate altresì da principj non controverfi, non poffono non effer veriffimi. Ma lafciato queft' argomento, ch'è omai difcuffo, paffiamo all'azione de' corpi fluidi contro a' folidi, ovvero alla refiftenza, che patifcono i folidi viaggianti per mezzo ai fluidi.

C. L'argomento, che da tal materia deducono i cartefiani, è femplice, ed è fondato fopra una fperienza, che par ficura, cioè che fe due correnti d'acqua con ineguale velocità urtino contro al medefimo folido, le forze, onde viene quefto al moto follicitato, fe non fono efattamente in ragion duplicata

ta

ta delle velocità, almeno vi s' avvicinano aſſai; e lo ſteſſo vale della reſiſtenza, che patiſce un ſolido, il qual viaggia in un fluido con diverſe celerità. Poſto ciò; ſecondo la ſentenza leibniziana la forza dell' acqua è in ragion duplicata delle velocità; ma in egual tempo tanto maggior quantità d' acqua urta il ſolido, quanto è maggior la velocità; dunque la forza dell' acqua contro al ſolido è in ragion compoſita duplicata delle velocità, e ſemplice delle velocità, cioè in ragion triplicata delle velocità; la qual conſeguenza allo ſperimento s' oppone. All' oppoſito, ſe ſuppongaſi la forza viva come la velocità, lo ſteſſo diſcorſo prova, che la forza di fluidi contro ad un ſolido è come il quadrato della velocità lo che alla ſperienza è conforme. Lo ſteſſo ſi dica della reſiſtenza, che un ſolido dall' acqua patiſce.

N. L' obbiezione ſiccome altre volte, così al preſente ſembrami inſuperabile.

L. A riſpondere a così fatta difficoltà, la cui prima apparenza è grandiſſima, io non voglio appoggiarmi ſe non ſopra principj certi, e inconcuſſi. Ma prima fa di meſtieri diſgombrar alcuni equivoci, dentro de' quali il paralogiſmo ſi naſconde, e s' appiatta. Quando ſi parla della forza, che proviene da un fluido, che urta la ſuperficie d' un ſolido, e della reſiſtenza, che patiſce un ſolido viaggiando per mezzo un fluido, non ſi parla di forze vive, ma di forze morte, le quali continuamente eſercitano nuova azione o per accreſcere, o o per diminuire la velocità al corpo. Di fatto i corpi, contro a' quali urta l' acqua corrente, non ſon tenuti in equilibrio da un uomo, o dalla tenacità d' una corda? dunque di forze morte ſi parla, e di queſte diceſi, che ſono in ragion duplicata delle velocità. E come dunque per miſurar cotai forze morte l' energia della forza viva totale ſi mette in campo?

N. Incomincia qualche raggio di debil luce a riſchiarar la mia mente. Se tutta la forza viva dell' acqua urtante entraſſe in azione, allora ſi dovrebbe dire, eſſer eſſa come il quadrato della velocità. Ma una minima particella entra ſolamente in azione in un dato tempicello, e per un dato ſpazietto; una minima particella paſſa dall' acqua nel corpo: queſta convien miſurare, di queſta tener conto, e non della forza totale. Siccome del ſolido, che viaggia pel fluido una minima particella di

di forza ſi perde, la qual' unicamente fa di meſtieri metter a computo. E come ſi potrà mai provare, che queſta parte ſia in ragion delle forze vive intere, e per conſeguenza nell' opinione leibniziana, come i quadrati delle velocità? Che ſe ciò fuſſe, il diſcorſo tornerebbe in campo con più forza di prima. Non la diſcorro io bene ſecondo i ſemi, che voi avete premeſſi?

L. Parte sì, e parte nò; perdonate alla mia ingenuità. Ma prima ch' io dichiari quel di più, ch' io deſidero nel voſtro penſiero, è neceſſario, ch' io premetta la vera, e ſchietta ſoluzione della difficoltà, incominciando da un ſolido, che viaggia immerſo in un fluido. Sia un corpo $= A$, (*Fig.* 5) il quale ſia dotato della velocità $= V$, e viaggiando per uno ſpazio infiniteſimo, ed in un infiniteſimo tempo cacci di luogo la maſſa fluida $= m$. Egli è coſa chiara, che quì interviene una ſpecie di comunicazione di movimento, per cui il corpo A mette in moto la maſſa m; la qual comunicazione di movimento ſi può fare colle leggi de' corpi molli, e con quelle de' corpi elaſtici. Faremo il calcolo in amendue le ſuppoſizioni. Se la comunicazione di movimento ſi fa ſecondo la maniera de' corpi inerti, è noto, che la velocità comune tanto al corpo A, quanto alla maſſa m dopo l' urto, ſi è $= \frac{AV}{A+m}$; dunque la velocità perduta dal corpo A ſarà $V - \frac{AV}{A+m} = \frac{mV}{A+m}$, la quale però ſarà $= - dV$; dunque $\frac{mAV^2}{A+m} = - AVdV$; ma $- AVdV = rds$; per r intendo la reſiſtenza, che il corpo patiſce; dunque $\frac{mAV^2}{A+m} = rds$; ma m, cioè la maſſa del fluido cacciata di luogo è ſempre proporzionale allo ſpazio ds; dunque $\frac{AV^2}{A+m} = r$: ovvero eſſendo m infiniteſima, per rapporta ad A, ſarà $V^2 = r$, cioè le reſiſtenze in ragion duplicata delle velocità.

In altra maniera ſupponendo la formula leibniziana. La forza perduta dal corpo A ſarà $= \frac{A.V^2}{2} - \frac{A^3 V}{2.\overline{A+m}^2} =$

$A^2 m$

$\frac{A^2 m V^2 + \frac{A m^2 V^2}{2}}{\overline{A+m}^2}$: e cancellando i termini, che ſono infiniteſimi, perchè m è infiniteſima, reſterà la forza perduta dal corpo $A = mV^2$, eguale ſecondo i noſtri principj ad $r\,ds$; ma $m = ds$; dunque $V^2 = r$, come ſopra.

Finora abbiamo preſo dalla teoria de' moti accelerati la formula, che riguarda gli ſpazj: prendiamo ora quella, che appartiene ai tempi, e vedremo, che la coſa torna la ſteſſa. Abbiam ritrovato $\frac{mV}{A} = -dV$; dunque $mV = -A\,dV = r\,dt$; ma m, eſſendo proporzionale allo ſpazio, ſarà $= V\,dt$; dunque $V^2\,dt = r\,dt$, ovvero $V^2 = r$, ſiccome poco fa ſi è ritrovato.

C. Ne' corpi molli la coſa ſembra chiara, e dimoſtrata; ma negli elaſtici, che avverrà? Parmi, che l' elaſticità debba apportare qualche mutazione.

L. Proſeguiamo, e dopo aver veduto, che la reſiſtenza del ſolido è proporzionale al quadrato della velocità, ſe la comunicazione del moto ſi fa alla maniera de' corpi inerti, veggiamo quel, che interviene, ſe ſi compia alla maniera de' corpi elaſtici. Fatta la comunicazione, ſi avrà la velocità del corpo $A = \frac{AV - mV}{A+m}$; dunque la velocità perduta $= V - \frac{AV - mV}{A+m} = \frac{2mV}{A+m} = -dV$, e multiplicando per AV, ſarà $\frac{2mAV^2}{A+m} = -AV\,dV = r\,ds$; ma $m = ds$; dunque $\frac{2AV^2}{A+m} = 2V^2 = r$.

In altra maniera ſuppoſta la ſentenza delle forze vive. La forza perduta dal corpo $A = \frac{AV^2}{2} - \frac{AV^2 \cdot \overline{A-m}^2}{2 \cdot \overline{A+m}^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^3V^2 + 2A^2mV^2 + Am^2V^2 - A^3V^2 + 2A^2mV^2 - Am^2V^2}{\overline{A+m}^2} = 2mV^2 = r\,ds$ ſecondo i noſtri principj; ma $m = ds$; dunque $2V^2 = r$, come ſopra.

Servendoſi poi della formula de' tempi, ſi avrà $2mV =$

 $-A\,dV$

$- AdV = rdt$; ma $m = ds = Vdt$; dunque $2V^2 dt = rdt$, ovvero $2V^2 = r$, ficcome cogli altri metodi.

N. Elegantiffima, e fpedita maniera, ch' io non avrei afpettata giammai. Ecco come dalle leggi della comunicazione del moto, combinate con quelle delle forze continuamente applicate, fi ritrova, che la refiftenza, la qual patifce un folido viaggiante in un fluido, è come il quadrato delle velocità, con quefto fol di divario, che ne' fluidi perfettamente elaftici è dupla di quella, che foffre negli inerti perfettamente: onde negl' imperfettamente elaftici ftarà di mezzo. A dirvi candidamente, quefta fpeculazione m' è affai piacciuta; me ne rallegro con effo voi.

L. Non devo ricevere quella lode, che non è mia. Tutta quefta fpeculazione m' è ftata fuggerita, e privatamente comunicata dal Co: Jacopo Riccati. Io non fo, fe avrò feguito interamente il fuo metodo; ma la foftanza è tal, quale io ve l' ho efpofta. Avvertite però, che i folidi viaggianti dentro ai fluidi, oltre alla refiftenza proveniente dall' inerzia della materia, patifcono altri generi di refiftenze, come di tenacità, di frizione ec. Anzi le leggi di quella, che dall' inerzia proviene della materia, vengono alcun poco turbate dall' altro fluido circoftante. Per la qual cofa accade, che negl' efperimenti non fi trovano le refiftenze efattamente, come i quadrati delle velocità; ma vi s' accoftan però, quando maffimamente corpo di tal natura fi fcelga, come farebbe la lenticolare, che diminuifca gli impedimenti accennati. S' aggiunga, che molti di quegl' impedimenti altro non fanno, fe non fe obbligare il corpo a far una comunicazzion di movimento, che ftia di mezzo tra i perfettamente molli, ed i perfettamente elaftici; la qual varietà cangia folo i coefficienti delle noftre formule, non gli efponenti. Può però effere, che fotto diverfe velocità il coefficiente ancora riefca non coftante, ma variabile.

N. Si è in me diffipata interamente quella difficoltà, che mi faceva tanta apparenza. Ma ditemi, qual cofa v' è difpiacciuta nelle mie parole, nelle quali avete detto effer parte di vero, e parte di falfo?

L. Non avete voi detto, che fe quella infinitefima parte di forza, che il corpo perde avanzandofi, foffe, come le forze totali, o in ragion di quadrati delle velocità, fi potrebbe

con

con più di ragione inſtituire il diſcorſo contra di noi? Non ho io dimoſtrato, e non ſi raccoglie chiaramente dalle formule teſtè ſcritte, che le forze per iſpazj eguali perdute ſono, come i quadrati della velocità iniziale; e come perciò ſi può rinovare il diſcorſo? Già conſiderandoſi lo ſpazio, ſi è meſſo a computo tutta la maſſa del fluido, a cui ſi è il moto comunicato; dunque la reſiſtenza ſeguita ad eſſere, come il quadrato della velocità.

N. Intendo. Ma in tempi eguali, che ſeguirebbe nella ſentenza leibniziana, perchè nella carteſiana lo veggio chiaro?

L. Eccolo; le forze perdute ſono ſempre in ragion compoſita de' quadrati delle velocità, e de' minimi ſpazietti; ma gli ſpazietti ſono ſempre in ragion compoſita delle velocità, e de' tempicelli; dunque le forze perdute in ragion triplicata delle velocità, e ſemplice de' tempicelli, i quali prendendoſi eguali, reſteranno le forze perdute in ragion triplicata delle velocità.

C. Collo ſteſſo metodo ſpiegherò io ancora la coſa nella carteſiana ſentenza. Se la comunicazion ſi faceſſe alla foggia de' corpi inerti, la forza primiera ſarebbe $= AV$, la forza reſidua $= \frac{A^2 V}{A+m}$; dunque la perduta $= AV - \frac{A^2 V}{A+m} = \frac{m AV}{A+m} = mV$; dunque $mV = -A\,dV = r\,dt$; ma $m = ds = V dt$; dunque $V^2 dt = r\,dt$; dunque $V^2 = r$. Lo ſteſſo ſi raccoglierà, ſe la comunicazione del moto ſi compia alla maniera de' corpi elaſtici.

L. Io non ho mai negato, che il preſente fenomeno ſi ſpieghi ancora da' carteſiani; ho combattuto ſolo per dimoſtrare, che i leibniziani lo ſpiegano altresì con ogni facilità.

N. Convengono tutti, che la reſiſtenza, che patiſce un ſolido viaggiante per mezzo ad un fluido, è perfettamente eguale alla forza, onde il ſolido vien ad eſſer ſollecitato, allorchè è immerſo nell'acqua corrente; dunque ſe quella è, come il quadrato della velocità, lo ſarà ancor queſta.

L. Così è. Ma biſogna avvertire, che un ſolido, il qual viaggia dentro ad un fluido, da principio lo trova quieto, e ſtagnante; indi egli ſteſſo gli comunica qualche movimento, ſicchè ſi ritrova viaggiare in un fluido, che pur ſi muove. In

tal caso non bisognerà dire, che la resistenza è in ragion duplicata dell'assoluta velocità del solido, ma sol della relativa rispetto al fluido. Similmente si vuol avvertire nell'altro caso, dove il solido riceve il movimento dal fluido, che non si dovrà metter in conto se non la velocità relativa, cioè se non l'eccesso della velocità del fluido sovra quella del solido.

C. Rimango appien soddisfatto della vostra spiegazione, nè ho cosa da oppor in contrario; però sarà bene, che passiamo al terzo capo, di che oggi dobbiam parlare, cioè a dire, agli urti indiretti, ed alla comunicazione del movimento, ch'indi risulta.

L. Trattando di quest'argomento, con cui porrem fine ai congressi, ch'alle forze vive abbiam destinati, io penso, che sia di mestieri di cangiar metodo, e di tenerne un diverso dal tenuto fin ora.

C. E per qual ragione?

L. Dirovvela. Nell'altre giornate abbiam esaminati quegli argomenti, che si traevano da materie messe per lo più interamente nella sua luce, onde sonosi da noi ordinariamente supposte le teorie dimostrate per altro metodo dagli autori; e sol per noi s'è discusso quello, che da esse ricavar si potesse in favore dell'una, e dell'altra opinione intorno alle forze vive. Ma essendo la materia, ch'ora abbiam per le mani, per la maggior parte da dense tenebre ricoperta, fa di mestieri rischiararla con nuovo lume; altrimenti senza veruna speranza si ricercherebbe la verità, quando non si facesse uso se non di principj dubbj, ed incerti; essendo assioma incontrastabile, che dall'incerto non si raccoglie se non l'incerto. Ed in ciò credo, ch'abbia errato più d'uno scrittore, il quale da' teoremi supposti veri, e ricevuti senza disamina ha combattuta l'opinione, ch'egli negava.

C. Ma non è stata scritta cosa veruna di certo in questa materia?

L. Degli urti indiretti di due corpi è stato scritto da parecchi, e per quanto io penso con tutta verità, siccome vedremo appresso. Ma di tre, o più corpi, che tutti ad un tempo vengano ad urtarsi, io non ritrovo, ch'altri abbia scritto, se non il Sig. Giovanni Bernoulli, ch'abbiamo tante volte nominato con somme lodi. Leggete la disertazione, ch'ha meritati gli elogj dell'Accademia real di Francia. Quanto in tal

pro-

proposito ha scritto il celebre Autore, io lo tengo per verissimo, ma noi non possiamo farne uso; perciocchè è dedotto dal principio medesimo delle forze vive, e dalla conservazione d'esse; supponendosi dopo l'urto de' corpi perfettamente elastici la medesima forza viva, che prima aveasi.

N. Avete voi metodo per metter in chiaro, e dimostrare una materia, che giudico intricatissima.

L. Io non vi prometto di ritrovar tutto; ma il metodo, ch'ho trovato serve per molto. Ed in una materia intatta gradirete, cred'io, se v'esporrò quello, ch'ho pensato, confessando ingenuamente, che vi rimane molto da speculare.

C. Non sarà piccola grazia, che ci farete, coll'insegnarci una verità nuova. Perciò lasciati i proemj date incominciamento, che noi ci mettiamo in attenzione per ascoltarvi.

L. Sovvengavi d'un teorema, che, seguendo la traccia del Sig. Giovanni Bernoulli, abbiam dimostrato nelle passate giornate; che se due corpi A, B, (*Fig. 6*) delle cui masse il centro sia C, vengano a chiuder una serie d'elastri A B con velocità, le quali sieno come A C, B C, cioè in ragion reciproca delle masse, e se il punto C sia con un chiodo fermato, egli ritrovasi sempre in equilibrio in mezzo a due forze eguali, ed i due corpi nello stesso tempo perdono il movimento loro serrando gli elastri, ed aprendosi questi di nuovo acquistano nello stesso tempo le primiere velocità. Dal che si è dedotto, che venendosi due corpi incontro con velocità reciproche alle masse, se son molli, si fermano, se perfettamente elastici, ritornano indietro colle stesse velocità.

C. Me ne ricordo, e so, che con questo solo principio raccogliesi l'intera teoria della comunicazione del movimento tanto ne' corpi perfettamente molli, quanto ne' perfettamente elastici. Conciossiachè se suppongasi, che i corpi si muovano in una gondola, la quale pur si muova con qualunque data celerità, una novella ipotesi avremo per riguardo al lido: anzi qualunque ipotesi otterrassi modificando opportunamente la velocità della gondola; del qual metodo s'è servito il primo il celebre Cristian Ugenio.

L. Così è. Ma di cotal metodo non s'è fatt'uso, se non negli urti diretti de' corpi, perchè alla barca altra velocità non s'è comunicata, se non se o contraria, o cospirante

te alla velocità de' due corpi A, B. Ma se supporremo, la velocità della barca esser dotata di tutt'altra direzione, come di CO, chiara cosa è, ch' i corpi A, B si verranno incontro per riguardo al lido colle velocità AO, BO; ma per riguardo alla barca dopo dell' urto si fermano, se son molli; dunque per rispetto al lido cammineranno colla sola velocità della barca, cioè con CO; se poi sono del tutto elastici ritornano indietro per riguardo alla gondola colle velocità CA, CB; dunque per rapporto al lido cammineranno colle velocità composite di queste, e di quella della barca, cioè fatti i parallelogrammi OCAG, OCBF colle velocità CG, CF.

N. Permettetemi, ch' io confronti il presente metodo coll' ordinario, perchè da così fatte comparazioni suolsi per lo più ricevere molto lume. In questa vostra ipotesi è chiaro, che in qualunque luogo s' incontrino i corpi, la linea, che congiunge i centri loro, e passa pel contatto, sarà sempre paralella ad AB. Quindi condotta OM perpendicolare ad AB, la velocità del corpo A, cioè AO, si risolverà nelle due AM, MO, e quella del corpo B, cioè BO, nelle due BM, MO. La MO comune all' un corpo, e all' altro niente opra *nell urto*; e però voglionsi considerare i corpi siccome urtantisi colle velocità AM, BN.

E' noto, che se i corpi son molli, venendo all' urto colle velocita AM, BN, dopo l' urto viaggiano unitamente colla velocità CM; dunque mettendo in computo la velocità MO, che non perdono, cammineranno colla velocità composita di CM, MO, cioè con CO, siccome voi avete trovato.

Se poi sono elastici, il corpo A ritornerà indietro colla velocità CA + CM; ma se si lascia cadere dal punto G sovra la AB la normale GN, la AN riesce eguale alla CM; dunque il corpo A ritornerà colla velocità CN; dunque messa a computo la velocità MO viaggerà colla velocità composita di CN, MO, cioè CG, come vi ha dato il vostro metodo. Similmente il corpo B ritornerà dall' urto colla velocità CB − CM; ma lasciando dal punto F cadere la perpendicolare FP, sarà PB = MC; dunque il corpo B ritornerà colla velocità CP, la quale combinata colla MO darà CF, come voi avete ritrovato.

C. Io veggio, che sonosi con due metodi determinate le velo-

velocità dopo l'urto, ed in parte le direzioni: dico in parte, perciocchè le velocità con che viaggeranno, saranno bensì parallele alle CO, CG, CF; ma siccome compito l'urto non partiranno dal punto C, ma da altro punto: così ad aver le vere direzioni fa di mestieri determinar questo punto. Per la qual cosa bisogna prima determinar il punto, ove s' incontrano, lo che non è difficile data la grandezza de' corpi. Ciò non basta; bisogna almen pe' corpi molli veder, come segua la contusione, e ne' corpi e molli, ed elastici saper il tempo, in cui la contusione, indi la restituzione si compia, le quali cose dai diversi generi de' corpi interamente dipendono.

L. Di grazia non entriamo in così fatte disamine, le quali ne sarebbero molto fruttuose, e ci porterebbero assai lontani dal principale nostro suggetto. Ricaviam piuttosto le leggi, che s' osservano in cotal genere di comunicazione di movimento, e che riguardano o l'una, o l' altra dell' opinioni, ch' esaminiamo. E per quel, ch' alla leibniziana concerne. Se i corpi si riguardano siccome molli, io ritrovo, che la forza, onde erano dotati prima dell' urto, eguaglia quella, che conservano dopo l'urto coll' aggiunta di quella, che nella contusion si consuma. Concioffiachè è evidente, che nel nostro caso impiegasi nella contusione quella stessa forza, che s' impiegherebbe, se i corpi venissero all'urto colle velocità AC, BC, formandosi e nell' un caso, e nell' altro la medesima contusione; ma venendo all' urto colle velocità AC, BC si fermerebbero, e per conseguenza impiegherebbero tutta la forza onde son dotati, cioè $\frac{A.AC^2 + B.BC^2}{2}$; dunque anche quando s' incontrano colle velocità AO, BO si spenderà una forza eguale nella contusione. Ciò posto io dico, che $\frac{A.AO^2 + B.BO^2}{2} = \frac{\overline{A+B}.CO^2}{2} + \frac{A.AC^2 + B.BC^2}{2}$: concioffiachè $AO^2 = OC^2 + AC^2 - 2AC.CM$, dunque $A.AO^2 = A.OC^2 + A.AC^2 - 2A.AC.CM$. Di più $BO^2 = OC^2 + BC^2 + 2BC.CM$; dunque $B.BO^2 = B.OC^2 + B.BC^2 + 2B.BC.CM$. Quindi aggiungendo un' equazione all' altra, sarà $A.AO^2 + B.BO^2$
$= A$

$= \overline{A+B}.OC^2 + A.AC^2 + B.BC^2 + 2CM. - \overline{A.AC + B.BC}$; ma essendo le velocità AC, BC reciproche alle masse, si avrà $A.AC = B.BC$; dunque $-A.AC + B.BC = 0$: e però $A.AO^2 + B.BO^2 = \overline{A+B}.OC^2 + A.AC^2 + B.BC^2$, la qual'equazione divisa per 2 fa palese esser vero ciò, che si dovea dimostrare. Io ritrovo anche in questo caso vera la legge, ed il metodo leibniziano: lascierò a voi la cura di rinvenire la legge dell'altra sentenza.

C. Il metodo de' cartesiani era, che nell'urto de' corpi molli tutta la forza conservasi, eccettuatene quelle parti, che essendo eguali, e contrarie s'elidono. Qui venendo all'urto i corpi colle velocità AO, BO, le quali non sono ne contrarie, ne cospiranti, sarà di mestieri risolverle. Risolviamo la prima nelle due AC, CO, la seconda nelle due BC, CO; dunque la forza prima dell'urto sarà $A.AC + A.CO + B.BC + B.CO$; ma $A.AC$, $B.BC$ essendo eguali, e contrarie distruggonsi; dunque rimarrà $\overline{A+B}\ CO$, che sarà la forza dopo l'urto, la qual divisa per la massa darà la velocità. Questo metodo, siccome a me ne pare, debbono i cartesiani *tenere*.

L. Voglio, se mi date licenza, imitare il vostro raziocinio, e discorrerla così. La velocità AO si risolve nelle due AM, MO, la velocità BO nelle due BM, MO; dunque prima dell'urto la forza del corpo A sarà $A\ AM + A.MO$; la forza del corpo B sarà $B.BM + B.MO$; ma essendo $A.AM$, $B.BN$ contrarie sì, ma non eguali, s'eliderà nella forza $B.BN$ sol'una parte $= A.AM$; e fatta cotal'elisione, siccome è noto, rimarrà $\overline{A+B}.CM$; dunque la forza dopo l'urto nella direzion BA sarà $= \overline{A+B}.CM$, che divisa per la massa darà la velocità $= CM$. Nella direzion MO la forza sarà $= \overline{A+B}.MO$, la qual divisa per la massa darà la velocità $= MO$; le quali due velocità composte, avremo, come prima, la velocità CO. Quale di questi due raziocinj è il legittimo?

C. Sembrami, ch'agevole sia la risposta, dicendo, che amendue. E non terminano essi nelle medesime conseguenze? e non dimostrano amendue la stessa stessissima verità? Anzi sembra l'uno confermazione espressa dell altro.

L. Amen-

L. Amendue li ammetterei volentieri, quando non altrò si volesse, che produrre una dimostrazione geometrica derivata dalle leggi già dimostrate; ma perchè si pretende, ch' in essi contengasi la vera economia, e distribuzion delle forze, mi pare evidentemente, che s' oppongano, e contraddicano.

C. E perchè?

L. Ma non vedete, che seguendo il primo metodo, i corpi agiscono l' uno contra dell' altro colle velocità A C, B C, e per conseguenza colle forze A . A C, B . B C, le quali essendo eguali, e contrarie s' elidono; all' opposito nel secondo metodo entrando i corpi in azione colle velocità A M, B M, e per conseguenza colle forze A . A M, B . B M, le quali sono bensì contrarie, ma non eguali; dunque s' eliderà solo la forza A . A M con una parte eguale della forza esistente nel corpo B; le quali forze elise son molto minori di quelle, che s' elidon nel primo metodo. E come volete voi, che nel medesimo caso e maggiori, e minori forze s' elidano? I due metodi, per quel che riguarda la distribuzion delle forze, dunque non convengono, ed uno distrugge ciò, che l' altro raccoglie.

N. Cotali intoppi non s' incontrano nel metodo leibniziano, nel quale comunque la cosa si consideri, sempre la stessa forza nella confusione s' impiega. In somma chi incontra la verità, spiega felicemente tutti i fenomeni; laddove chi n' è lontano, ad ogni passo s' arresta, s' inviluppa, e s' intrica.

C. Prima di cedere affatto il campo, e di depor l' arme, non voglio lasciar intentata ogni difesa. Essendo pur vero, che due corpi in qualunque maniera vengano all' urto, giunti che vi sono, agiscono l' uno contra dell' altro perpendicolarmente; cioè la direzione dell' azioni loro riesce sempre normale alla comune tangente, osservo in qual de' due metodi sopradescritti ciò si consideri. Nel primo non pare, perchè la direzione C O non tocca le sfere venute al contatto; ma nel secondo, essendo M O tangente delle due sfere, si considera senza dubbio, che l' azione de' corpi è perpendicolare ad M O, e però tal quale si fa in natura. Dunque il metodo, dirò io, che contiene la distribuzion delle forze non è il primo, ma il secondo.

L. Quantunque potessi alcuna cosa ridire, pure il tutto voglio senza replica alcuna accordarvi. Dunque se nell' ipo-

teſi il punto O, (*Fig.* 7) in cui s'incontrano, ſarà tale, che la perpendicolar OM tagli la BA dopo i punti B, A, eſſendo le forze A.AM, B.BM non più contrarie, ma coſpiranti, non s'elideranno in guiſa veruna; dunque dopo l'urto vi dovrà eſſer la ſteſſa forza, che prima, perchè niuna forza s'è eliſa, ne conſumata. Ma che non ſieno eguali così generalmente il dimoſtro.

Fatto centro in O coll'intervallo OA deſcrivo l'arco circolare ATV, e coll'intervallo OC l'arco CS, e condotte le corde SC, VT, le quali ſaranno paralelle, produco queſt'ultima, finchè tagli AC in X. Eſſendo SC, VX paralelle, ſarà $XC : CB :: VS = TC : SB$; ma $AC > XC$; dunque

$$AC : CB :>: TC : SB;$$

ma $$AC : CB :: B : A;$$

dunque $$B : A :>: TC : SB;$$ dunque $B.SB > A.TC$; ma $SB = OB - OC$, e $TC = OC - OA$; dunque $B.\overline{OB - OC} > A.\overline{OC - OA}$; dunque $B\,OB + A.OA > \overline{A + B}.OC$; ma i primi rettangoli eſprimono la forza carteſiana innanzi all'urto, il ſecondo la forza dopo l'urto: la forza innanzi all'urto è dunque ſempre maggiore della forza appreſſo l'urto.

C. Voi ci ſtringete da tutti i lati; ma non voglio ancora rendermi vinto, e tentar mi giova l'ultima difeſa, che mi rimane. Egli è vero, che ſe conſideriamo le forze, di cui ſon dotati i corpi prima dell'urto nelle direzioni AO, BO; queſte ſon maggiori di quella, di cui appreſſo l'urto forniti ſono. Ma fa d'uopo conſiderare la forza, che anche prima dell'urto hanno nella direzione CO; e troverete allora, che niuna diſuguaglianza vi ſarà mai.

N. Meſchiniſſima ritirata; perciocchè a propriamente parlare nella direzione CO prima d'urtarſi non hanno i corpi forza di ſorte alcuna, non movendoſi per quel verſo: e in tanto ne hanno dopo, in quanto le forze, di che prima eran forniti, per l'azion mutua a prendere la novella direzione ſono obbligate.

L. Accordiamo tutto, ed uſiamo in queſt'ultima giornata un'eroica liberalità. Sicchè i due corpi prima dell'urto altra forza non hanno nella direzione CO, ſe non quella, che viene eſpreſſa per $\overline{A + B}.CO$?

C. Co-

C. Così dico.

L. Dunque non sarà possibile, che senza novella azione di forza morta acquistino nella direzione CO una forza maggior dell' esposta?

C. Questo ne viene di conseguenza.

L. Se però vi farò vedere, che senza nuova azione ciò agevolmente s' ottiene, che direte?

C. Darò alla mia ritirata il titolo, onde è stata onorata dal Sig. Nestore, di meschinissima.

L. Eccovene la maniera. Prodotta ad arbitrio la direzione CO in N, (*Fig.* 8) si descrivano due curve, che tocchino in N la direzione CO, ed in P, M le direzioni AO, BO, le quali due curve dai mobili si percorrano in tempi eguali, la qual cosa è facile ad ottenersi. I mobili costretti a viaggiar per le curve usciranno da esse con quelle velocità, con che entrati vi sono, cioè con AO, BO; dunque per la direzione CO avranno le forze $A.AO + B.BO$ maggiori della $\overline{A+B}.CO$; e pure niuna azione è intervenuta di forza morta.

C. Non saprei, che ridire, però io domando, Sig. Nestore, il vostro soccorso.

N. In vano lo sperate, perchè il tutto sembrami cospirare contra di voi. Nell' ipotesi cartesiana trovo ad ogni passo un intoppo. In primo luogo viaggiando i corpi per le linee AO, BO (*Fig* 6) a rinvenire la distribuzion delle forze, fa di mestieri risolverle, e sostituirne altre maggiori, con qual fondamento, nol veggio. Permessa cotale sostituzione ora accade, che parte della forza si debba elidere, ed ora nò; e pure le forze innanzi all' urto sono sempre maggiori della forza dopo l' urto. Tutto ciò mi sembra un inviluppo, che non si possa sciogliere in guisa alcuna. All' opposito la leibniziana viaggia sì pianamente, che nulla più. Mentre i corpi vengono all' urto colle velocità AO, BO, la loro velocità respettiva è BA; dunque nella mutua contusione devesi impiegar quella forza, che si consumerebbe in un' urto diretto fatto colla velocità respettiva AB; dunque la forza innanzi all' urto, detratta questa, che nella contusione s' impiega, dee esser eguale a quella, che viva riman dopo l' urto, come s' è dimostrato accadere. Rende anche ragione degli altri metodi, che procedono per via di

riſoluzione, perchè riſolvendoſi le velocità A O, B O, non ſi fa altro, che ſoſtituire forze eguali in luogo d'eguali.

L. Una rifleſſione ſopra queſt' ultime parole non vi ſarà diſcara. Due riſoluzioni abbiamo uſate. In una abbiam riſolute le due velocità A O, B O nelle quattro A M, M O, BM, M O; per la qual riſoluzione in luogo della forza per A O ne abbiamo ſoſtituite due eguali per A M, M O, e in luogo di quella per B O due ſimilmente eguali per B M, M O. Ma nella ſeconda riſoluzione in luogo delle due forze per A O, B O abbiamo ſoſtituite le quattro per A C, C O, B C, C O, dove quanto la forza per B O è maggiore delle due per B C, CO, tanto la forza per A O è minore delle due per A C, CO; come è chiaro dalle coſe dimoſtrate. Perlochè ſcorgeſi eſſer ſempre lecita la prima riſoluzione, ond' è nato, ch' i carteſiani l' hanno aſſegnato l' ufficio di diſtribuire le forze: l' altra non è lecita, ſe non ſi faccia una giuſta compenſazione, per cui rimangano le partite eguagliate.

N. Non altro rimane da dimoſtrare, ſe non che ne' corpi perfettamente elaſtici la forza viva leibniziana è la ſteſſa prima, e dopo dell' urto.

L. Eccovi la dimoſtrazione ſchiettiſſima. S' è fatto vedere, che $A.AO^2 + B.BO^2 = \overline{A + B}.CO^2 + B.BC^2 + A.AC^2$, ovvero $A.AO^2 + B.BO^2 = A.CO^2 + AC^2 + B.CO^2 + BC^2$; ma $CO^2 + AC^2 = AG^2 + AC^2 = CG^2 - 2.AC.AN$, di più $CO^2 + BC^2 = BF^2 + BC^2 = CF^2 + 2.BC.BP$; dunque $A.AO^2 + B.BO^2 = A.CG^2 - 2A.AC.AN + B.CF^2 + 2B.BC.BP$; ma eſſendo $B.CB = A.AC$, di più $BP = AN$, ſarà $B.BC.BP = A.AC.AN$; dunque diſtrutti i termini, che s' elidono ſarà $A.AO^2 + B.BO^2 = A.CG^2 + B.CF^2$, la qual equazione diviſa per 2, darà la forza viva prima dell' urto eguale a quella, che ſi ha appreſſo l' urto.

Queſto è il progreſſo leibniziano ſpedito, e chiaro. Laſcierò, che per voi, Sig. Ceſare, s' eſponga il carteſiano; poichè non può aſſolutamente eſſer vero, che le quantità del moto prima dell' urto ſieno eguali a quelle dopo l' urto, non valendo l' equazione $A.AO + B.BO = A.CG + B.CF$.

C. Quant'

C. Quant' a me sono interamente convinto; pure per niente lasciar indietro di quel, che dicono, o che potrebbero dire, mi studierò da' principj loro di raccogliere la risposta. Osservo, che negli urti diretti de' corpi perfettamente elastici salvano l' egualità tra le forze prima, e dopo l' urto prendendo non la somma, ma la differenza delle quantità del moto, quando sono contrarie. Or nel caso nostro non essendo ne interamente contrarie, ne interamente cospiranti sarà di mestieri determinare, quando se ne debba prender la somma, e quando la differenza.

N. Credo, che ciò monterà poco; poichè son sicuro, che siccome non ha luogo l' equazione poco anzi esposta, che ne esprimeva la somma, così non vale ne pur l' equazione, che n' esprime la differenza, cioè $B.BO - A.AO = A.CG - B.CF$.

C. Se la cosa si prende cruda così, ella è troppo patentemente falsa; bisognerà far uso di qualche risoluzione. Se la velocità BO si risolva nelle due CO, BC, e la velocità AC nelle due CO, AC, avremo avanti l' urto quattro quantità di movimento, due delle quali, cioè B.BC, A.AC per esser eguali, e contrarie non si devono metter a computo. Restano però l' altre due $\overline{A+B}.CO$. Similmente le due velocità dopo l' urto cioè CF, CG risolvonsi nelle CO, OF; CO, OG. Le due quantità di movimento B.OF, A.OG, essendo eguali, e contrarie, s' elidono; dunque si ha $\overline{A+B}.CO$ quantità di movimento dopo l' urto squisitamente eguale a quella, che s' avea prima.

L. Ma quì tornerà la domanda, perchè risolvere la velocità AO nelle due AC, CO, piuttosto che nelle due AM, MO? Similmente dicasi dell' altre.

C. Veracemente erami dimenticato d' aver io medesimo stabilito, questa essere la vera risoluzione della natura. Ma la cosa torna la stessa.

N. Tronchiamo omai cotali riflessioni, le quali troppo tempo domanderebbero, e ci obbligherebbero a ripeter le cose dette, ove s' è de' corpi molli parlato. Voi ne avete promesso d' insegnarci qualche cosa di nuovo intorno all' urto di tre, e più corpi.

L. Soddisfaccio prontamente alle vostre brame, e alle mie promesse. Dal teorema del Sig. Bernoulli, che se due corpi ven-

vengono a chiuder una serie d'elastri con velocità, le quali sieno come le distanze dal comun centro delle masse, cotal punto negl' elastri sta sempre immobile, e in equilibrio, e gli elastri tanto dall' una parte, quanto dall' altra in egual tempo si chiudono, ed in egual tempo si aprono, abbiam ricavato ciò, ch' a due corpi appartiene tanto negli urti diretti, quanto in molti indiretti. Or convienmi dimostrare un nuovo teorema, che congiunto col bernoulliano sarà il fondamento di tutta la novella teoria.

Concepite due corpi A, B, (*Fig.* 9) i quali colle velocità AC, BC si portino al punto C, si congiunga la AB, la qual dividasi in K in ragion reciproca delle masse, A, B, e si meni CK. Dal punto K conducansi KM, KN paralelle alle CB, CA. Dico, che se si porranno tre serie d' elastri, cioè CA, CB, CK fermate con un chiodo in C, le cui rigidità sieno come CM, CN, CK, ed i corpi A, B, A + B insiememente incomincino a chiuderli colle velocità AC, BC, KC; dico, che le serie in egual tempo si chiuderanno, e che il punto C sempre dalla serie KC verrà premuto con quella pressione, onde sarà premuto dalle due serie insieme CA, CB.

Prendansi gli elementi Ap, Bq, Kr proporzionali alle AC, BC, KC, e le velocità de' corpi A, B, A + B, si chiamino V, v, u. Avremo per le leggi del Galileo

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{MC \cdot Ap}{A} & & -VdV & & Ap & & AC & & V \\ \frac{NC \cdot Bq}{B} & \text{come} & -v\,dv; & \text{ma} & Bq & \text{come} & BC & \text{come} & v \\ \frac{KC \cdot Kr}{A+B} & & -u\,du & & Kr & & KC & & u \end{array}$$

dunque

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{MC}{A} & & -dV & & A & & KB \\ \frac{NC}{B} & \text{come} & -dv; & \text{ma} & B & \text{come} & KA \\ \frac{KC}{A+B} & & -du & & A+B & & AB \end{array}$$

dun-

dunque

$$\begin{array}{lcl} \frac{MC}{KB} & & -dV \\ \frac{NC}{KA} & \text{come} & -dr\,; \\ \frac{KC}{AB} & & -du \end{array} \quad \text{ma} \quad \begin{array}{l} \frac{MC}{KB} = \frac{AC}{AB} \\ \\ \frac{NC}{KA} = \frac{BC}{AB} \end{array}$$

dunque

$$\begin{array}{lclclcl} \frac{AC}{AB} & & AC & & V & & -dV \\ \frac{BC}{AB} & \text{ovvero} & BC & \text{ovvero} & r & \text{come} & -dr. \\ \frac{KC}{AB} & & KC & & u & & -du\,. \end{array}$$

Quindi raccogliesi, che le velocità perdute sono, come le primiere velocità; dunque ancor le residue; dunque le velocità ne' punti p, q, r sono, come le linee Cp, Cq, Cr. Quindi ripetendo il discorso dimostrerò, che ancor dopo i secondi elementi simili le velocità perdute, e residue, saranno come le primiere velocità, e così in tutti gli altri susseguenti. Verificandosi dunque mai sempre, che, dopo aver i corpi passati spazj proporzionali alle rette AC, BC, KC, le velocità perdute, e residue sono, come le primitive, ne seguita, che le velocità s' estingueranno interamente, poichè i corpi avranno passati spazj proporzionali alle rette AC, BC, KC.

Fa d' uopo ora di dimostrare, che gli elementi Ap, Bq, Kr, ed i susseguenti si passano nel medesimo tempo. Il tempo per Ap si chiami $= dT$, per $Bq = dt$, per $Kr = d\theta$. Per le leggi del Galileo sarà

$$\begin{array}{lclclclcl} dT & & \frac{Ap}{V} & & Ap & & V & & \\ dt & \text{come} & \frac{Bq}{r}\,; & \text{ma} & Bq & \text{come} & r\,; & & \text{dunque} \\ d\theta & & \frac{Kr}{u} & & Kr & & u & & \end{array}$$

$dT = dt = d\theta$; la qual verità si può dimostrare di tutti gli altri successivi elementi.

Da tutto ciò raccoglier si vuole, che per li tre corpi, i quali chiudono le tre serie d' elastri, nello stesso tempo si passano

sano

ſano, ſpazj proporzionali alle rette CA, CB, CK; dunque ciaſcun degli elaſtri nelle tre ſerie ſi ritrova maiſempre egualmente chiuſo; dunque la potenza, e la rigidità degli elaſtri ſarà, come le rette CM, CN, CK; dunque dalle due ſerie inſieme AC, BC verrà premuto il punto C con forze proporzionali alle rette CM, CN, e dalla ſerie KC con forza proporzionale alla retta CK; ma la forza CK equivale alle due MC, NC; dunque le preſſioni contro al punto C nate dalle due ſerie AC, BC ſono ſempre equivalenti alla preſſione nata dalla ſerie KC.

Quello, che ſi è dimoſtrato delle ſerie degli elaſtri, le quali ſi ſerrano, ognun vede, che dimoſtrar ſi può egualmente delle ſerie, le quali ſi aprono, e ſi dilatano.

N. Una dimoſtrazione ella è queſta, a cui la lunghezza niente toglie di ſua eleganza; e già in parte diſcuopro i voſtri diſegni. Voi opporrete la ſerie KC alle due ſerie AC, BC, e per tal guiſa farete, che il punto C ſia coſtituito in mezzo a forze poſte in equilibrio, e perciò reſti immobile.

L. In parte appunto i miei penſieri avete ſcoperti; *perchè* il mio artificio ſarà alquanto *più ſottile, ed* univerſale, e ſi applicherà prima a tre corpi, indi a quattro, e così di mano in mano; e ciò ſi farà per una combinazione del teorema bernoulliano col mio.

Sieno tre corpi A, B, D, i quali ſi dirigano al centro comune delle maſſe C colle velocità AC, BC, DC; dico, che ſi fermeranno, ſe ſono inerti, che ritorneranno indietro colle ſteſſe velocità, ſe ſono perfettamente elaſtici. Congiungete AB, e ſi produca DC, la quale taglierà AB nel punto K in ragion reciproca delle maſſe A, B. Si menino KN, KM paralelle alle AC, BC, e ſi coſtituiſcano tre ſerie d'elaſtri CD, CA, CB, le cui rigidità ſieno, come CK, CM, CN. Di più ſi concepiſca una quarta ſerie CK della rigidità CK. Si fermi con un chiodo il punto C. Se due corpi A + B, D, delle quali maſſe il centro comune è C, vengano a ſerrar le ſerie CK, CD colle velocità KC, DC pel teorema bernoulliano le chiuderanno per guiſa, che in uno ſteſſo tempo perderanno le velocità loro, ed il chiodo C ſi ritroverà ſempre in mezzo a due forze eguali, e contrarie; ma pel mio teorema le ſerie CA, CB da corpi A, B vengono nello ſteſſo tempo chiuſe,

che

che la ſerie CK dal corpo A + B, e premono ſempre mai il chiodo C con due forze, le quali equivalgono a quella, che naſce dalla ſerie CK; dunque rimoſſa queſta, e quelle ſoſtituite, il punto C rimarrà in equilibrio; dunque levato il chiodo, il punto C rimarrà immobile, ed in un tempo ſteſſo le tre ſerie CA, CB, CD ſi chiuderanno; dunque non reſtituendoſi queſte, i corpi ſi fermeranno; e riacquiſteranno in contrario ſenſo le premiere velocità, ſe quelle ſi reſtituiſcano, e ſi riaprano.

N. Siamo giunti al termine prima di quello, ch' io m' aſpettaſſi. Mi piace il metodo aſſai; e tanto maggiormente, quanto che veggio, che il metodo per ſerie ſi può applicare a quattro, a cinque, anzi ad infiniti corpi, che vengano all' urto.

L. Giacchè il vedete, ſtudiatevi per voi medeſimo di far cotale applicazione, e ſollevate me dalla fatica.

N. Volontieri; perchè ſe prendeſſi la ſtrada falſa, avrò vicino, chi mi può inſegnare la buona. Sieno quattro corpi (*Fig.* 10) A, B, D, E, i quali al centro comune delle maſſe loro ſieno diretti, cioè al punto C colle velocità AC, BC, DC, EC. Condurrò AB, la quale dividerò in K in ragion reciproca delle maſſe A, B, e menata CK, collocherò tre ſerie d' elaſtri CE, CD, CK da chiuderſi dai corpi E, D, A + B; e le rigidità di queſte ſerie ~~ſieno tali,~~ quali voi l' avete parlando di tre corpi determinate. Condotte KM, KN paralelle a CB, CA, pongo due altre ſerie CA, CB, le cui rigidità ſieno alla rigidità della ſerie CK, come le rette CM, CN alla CK. Poſte queſte preparazioni è chiaro, che le tre ſerie EC, DC, KC nello ſteſſo tempo ſi chiudono, e che il punto C vien premuto da eſſe con forze poſte in equilibrio; ma le due ſerie CA, CB ſi ſerrano nello ſteſſo tempo, che la ſerie CK, e premono il chiodo C con due forze equivalenti a quella, onde vien premuto dalla ſerie CK; dunque queſta rimoſſa, e quelle ſoſtituite, le quattro ſerie nello ſteſſo tempo ſi chiuderanno, e il chiodo C ſi troverà in mezzo a quattro forze in equilibrio coſtituite; dunque levato il chiodo, il punto C ſi manterrà in equilibrio; e però compreſſi gli elaſtri, i corpi ſi fermeranno, e reſtituendoſi quelli, riacquiſteranno le primiere velocità.

Cotal metodo ſi può accomodare a qualunque numero di corpi paſſando da quattro a cinque, da cinque a ſei, e così

via via fino ad infiniti corpi. Dunque il teorema è universale, ed è verissimo, che se qualunque numero di corpi si porti in uno stesso punto al centro comune delle masse, dopo l'urto, staranno fermi se sono molli, ritorneranno indietro colle stesse velocità, se sono perfettamente elastici.

L. Stabilito l'universal teorema, non sarà difficile raccoglier ciò, che negli altri casi addiviene, quando i corpi non si portano al centro delle masse, chiamando in ajuto la teoria del movimento translato. Supponganfi i corpi A, B, D (*Fig.* 11) collocati dentro una gondola, per riguardo alla quale s'accostino al centro delle masse C colle velocità AC, BC, DC; la gondola poi si muova colla velocità CH; dunque compiti i parallelogrammi ACHM, BCHN, DCHP, e menate le diagonali AH, BH, DH, i corpi per riguardo al lido verranno all urto colle velocità AH, BH, DH, ma se i corpi son molli, per riguardo alla barchetta dopo l'urto si fermeranno; dunque per riguardo al lido avranno la velocità CH. Se poi i corpi dotati sono di perfetta elasticità, per rapporto alla barca ritornano in dietro colle velocità CA, CB, CD; dunque rispetto alla riva viaggeranno colle velocità, che risultano dalla *composizione* di queste, e della CH, cioè *colle velocità* CM, CN, CP.

N. Le cose dette, non v' ha dubbio, son sufficienti a sciogliere il problema; date le masse de' corpi, e le velocità loro prima dell' urto, le quali diriganfi a un punto, determinar le velocità dopo l' urto. Si portino i corpi A, B, D ad uno stesso punto H colle velocità AH, BH, DH. Si determini il centro delle masse poste in A, B, D, e questo sia C; si congiunga CH; questa sarà la velocità loro dopo l' urto, se i corpi son molli, ed inerti. Di più si meni CA, e chiudasi il parallelogrammo HCAM, e si conduca CM, la qual' esprimerà la velocità del corpo A dopo l' urto, supposti i corpi perfettamente elastici. Collo stesso metodo si determinerà le velocità dopo l' urto degli altri corpi.

C. In questa generale proposizione resta compreso il caso considerato dal Bulfingero. Colloca quest' Autore negli angoli d' un triangolo rettangolo isoscele ABD (*Fig.* 12) tre corpi eguali, e perfettamente elastici A, B, D, e suppone, che i corpi A, B colle velocità AD, BD vadano ad urtare il corpo quieto D. Veggiamo qual cosa debba seguire in virtù della

vo-

vostra dimostrazione. Meno D K perpendicolare all' Ipotenusa, e segno il centro C delle masse A, B, D, il qual punto dividerà D K in maniera, che D C sarà doppia di C K. Condotte AC, BC, e chiusi i paralellogrammi D C A M, D C B N, i corpi A, B dopo l'urto viaggeranno colle velocità C M, C N, e confrontando questa figura coll' antecedente, veggio, che la velocità C P del corpo D deve esser = 2 C D.

N. Immediatamente dal moto translato raccogliere lo potete. Se in una barchetta i corpi diriganfi al punto C colle velocità A C, B C, D C, pel teorema universale torneranno indietro colle stesse velocità C A, C B, C D. Pongasi la barchetta esser dotata della velocità C D, onde per riguardo al lido il corpo D prima dell' urto stia in quiete, ed i corpi A, B portinsi ad urtarlo colle velocità A D, B D; dunque aggiungendo la velocità della barca a quella del corpo D, egli viaggerà colla velocità = 2 C D. Componendo poi le velocità C A, C B, di cui per rispetto alla barca sono dotati i corpi A, B, colla velocità della barca C D, si otterranno dopo l'urto per rispetto alla riva le velocità C M, C N. S' accordano così fatte determinazioni con ciò, che viene dal Signor Bulfingero insegnato?

C. Ecco il luogo alla pag. 57. Addattando ciò, che insegna alla nostra figura, egli asserisce, che i corpi A, B dopo l'urto staranno fermi, e che il corpo D viaggerà colla velocità = 2 K D.

N. Come lo prova?

C. Non adduce prova veruna, e cita soltanto le regole del movimento; ma queste ben maneggiate danno assai minore la velocità del corpo D, e la vera stà alla supposta dal Bulfingero, come 2 : 3, e mostrano, che ancor gli altri due corpi si devono muovere dopo l'urto.

L. Per quel, che me ne pare, non siete il primo ad avvertir l' errore del Bulfingero; giacchè l' ha corretto nel suo libretto delle forze motrici il Sig. Marzagaglia.

C. Avete il libro?

L. Prendetelo; la cosa vien trattata nella prop. prima.

C. Per quel che veggio, egli s' accorda col Bulfingero nel determinare la velocità del corpo D appresso l' urto; ma assegna ai corpi A, B dopo l' urto le velocità K A, K B, accomo-

do le cose per lui insegnate alla nostra figura. In questo scolio apporta una ragione a dimostrare, che i corpi A, B non possono dopo l' urto essere senza moto. In questo punto la ragione è per lui; ma è falso, che i corpi A, B viaggino colle velocità K A, K B, muovendosi colle celerità C M, C N, ed il corpo D si trova avere non la velocità = 2 K D, ma = 2 C D. Ora veggio a qual fine detto abbiate, che i principj, onde trar si vogliono gli argomenti a sciogliere la quistione, devono esser inconcussi, e ben dimostrati. Il Sig. Bulfingero trae dalla sua ipotesi argomenti in favore del Leibnizio, il Sig. Marzagaglia in favor del Cartesio. E gli uni, e gli altri non sono da considerarsi, perchè dedotti da principj falsissimi.

L. Riassumendo dunque i principj giusti, osserviam le conseguenze, che generalmente raccolgonsi, ed in prima dimostriamo, che il centro delle masse e innanzi, ed appresso l' urto muovesi colla stessa celerità, o molli, od elastici sieno i corpi. Concioffiachè mentre prima dell' urto i corpi si portano al punto H (*Fig.* 11) colle velocità A H, B H, D H, chiara cosa è, che il centro delle masse si porta da C in H colla velocità C H; ma questa è quella dessa, con che viaggiano dopo l' urto unitamente, se molli sono; dunque anch' il centro delle masse si muove appresso l' urto colla velocità C H; dunque così fatto centro è dotato della stessa velocità e prima, e dopo dell' urto in supposizione, che i corpi molli sieno squisitamente, ed inerti. La dimostrazione ne' corpi molli è stata agevole; riuscirà ella egualmente facile negli elastici?

N. E perchè nò? Se bruttamente non isbaglio dev' esser piana, e schietta, quanto altra mai. Se i corpi fussero in M, N, P il centro delle masse sicuramente sarebbe in H; giacchè se finganfi viaggiare i tre corpi A, B, D colle velocità paralelle, ed eguali A M, B N, D P, il centro loro farà viaggio colla velocità paralella, ed eguale C H; dunque essendo i tre corpi pervenuti in M, N, P, il centro delle masse si farà portato in H. Ma se i corpi collocati in M, N, P si movessero colle velocità M C, N C, P C, il centro loro moverebbesi colla velocità H C; dunque se i corpi delle velocità contrarie saran dotati, cioè C M, C N, C P, il centro C si moverà colla velocità contraria C H; ma se i corpi sono perfettamente elastici, appresso l' urto si muovono colle velocità C M, C N, C P; dunque

que il centro loro avanzerà colla velocità CH, cioè con quella ſteſſa, con che viaggiava prima dell' urto.

C. Così fatta dimoſtrazione, la quale fa pompa d' una inaſpettata facilità, ed eleganza, dà a divedere, ſiccome ſe i corpi dopo eſſer venuti la prima volta all' urto, colle velocità nell' urto acquiſtate, rivolgendo cammino, tornino al congreſſo, in queſto ſecondo urto riprenderanno le primiere velocità, ma in ſenſo contrario. Concioſſiachè ſe vengano all' urto colle velocità MC, NC, PC, fatta la voſtra medeſima coſtruzione, ſi vedrà, che dopo l' urto ſaranno dotati delle velocità HA, HB, HD, eguali, ma contrarie a quelle, di che erano forniti prima d' amendue gli urti.

L. Quella proprietà, che riguarda il centro comun delle maſſe, è ſtata per voi così ſemplicemente provata, che per cotal facilità meriterebbe quaſi, che ſe le deſſe il primato. Non ſarà agevole così di dimoſtrare quelle proprietà, che riguardano i prodotti de' quadrati delle velocità per le maſſe. A queſto fine premetto i ſeguenti due lemmi, che opportunamente combinati, daranno una dimoſtrazione compita.

Lemma primo. Sianvi due corpi A, B, ch' abbiano per centro delle maſſe C; ſcielto qualunque punto H, ſi menino le rette AH, BH, CH, (*Fig.* 13) dico eſſer vera la ſeguente equazione

$$A.\overline{AH^2 - AC^2 - CH^2} + B.\overline{BH^2 - BC^2 - CH^2} = 0.$$

Dimoſtrazione. Da' punti A, B ſi conducano alla retta HC le normali AO, BP. Giacchè C ſi ſuppone eſſer il centro delle maſſe A, B, ſi avrà A : B : : BC : AC; ma perchè ſono ſimili i triangoli BCP, ACO, ſarà BC : AC : : CP : CO; dunque A : B : : CP : CO; dunque A.CO = B.CP; e multiplicando l' una e l' altra parte dell' egualità per 2CH, ſarà A.2CH.CO = B.2CH.CP; ma 2CH.CO per Euclide è l' eceſſo, onde il quadrato AH ſupera i due quadrati AC, CH, e 2CH.CP è l' eceſſo, onde il quadrato HB vien ſuperato dai due quadrati BC, CH; dunque $A.\overline{AH^2 - AC^2 - CH^2} = B.\overline{-BH^2 + BC^2 + CH^2}$, e poſti tutti i termini dall' una parte

te dell' equazione si avrà $\begin{matrix} A\,.\,\overline{AH^2 - AC^2 - CH^2} \\ +\, B\,.\,\overline{BH^2 - BC^2 - CH^2} \end{matrix} = 0$; siccome dimostrar si dovea.

C. Finora non havvi difficoltà da metter paura.

L. Ho proccurato d' agevolar la dimostrazione, quanto m' è stato possibile.

Lemma secondo. Se da' due corpi A, B (*Fig.* 14), e dal centro delle masse loro K a due punti presi ad arbitrio H, C, si menino le rette AH, BH, KH, AC, BC, KC, e si congiunga HC, dico verificarsi la seguente equazione $\begin{matrix} A\,.\,\overline{AH^2 - AC^2 - HC^2} \\ +\, B\,.\,\overline{BH^2 - BC^2 - HC^2} \end{matrix} = \overline{A + B}\,.\,\overline{HK^2 - KC^2 - CH^2}$.

Dimostrazione. Da' punti A, B, K nella retta HC prodotta meninsi le normali AO, BP, KQ. Poichè K è il centro delle masse A, B, sarà B : A :: AK : BK; ma AK : BK :: OQ : QP; dunque B : A :: OQ : QP; dunque B . QP = A . OQ; ma QP = CP − CQ, e OQ = CQ − CO; dunque $B\,.\,\overline{CP - CQ} = A\,.\,\overline{CQ - CO}$; dunque trasposti i termini, si avrà $A\,.\,CO + B\,.\,CP = \overline{A + B}\,.\,CQ$: e multiplicando l' una parte, e l' altra dell' equazione per 2CH, sarà $A\,.\,2CH\,.\,CO + B\,.\,2CH\,.\,CP = \overline{A + B}\,.\,2CH\,.\,CQ$; ma 2CH . CO è l' eccesso, onde il quadrato AH supera i due quadrati AC, CH; la qual cosa vale similmente negli altri termini; dunque si avrà $\begin{matrix} A\,.\,\overline{AH^2 - AC^2 - CH^2} \\ +\, B\,.\,\overline{BH^2 - BC^2 - CH^2} \end{matrix} = \overline{A + B}\,.\,\overline{KH^2 - KC^2 - CH^2}$: siccome si dovea dimostrare.

Supposti i lemmi premessi, discorriamola così. Sieno i tre corpi A, B, D, ch' abbiano per centro delle masse C, e menate, come sopra, le necessarie linee, dico, che sarà

A.

$$\begin{aligned} &A.\overline{AH^2 - AC^2 - HC^2} \\ &+B.\overline{BH^2 - BC^2 - HC^2} = o. \\ &+D.\overline{DH^2 - DC^2 - HC^2} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Producasi DC finchè tagli AB in K, il qual punto sarà il centro delle masse A, B. Menisi KH, e nel punto K s' intendano raccolte, e collocate le due masse A, B. Non v' ha dubbio, che il punto C non sia il centro delle masse A + B, e D; dunque pel lemma primo sarà

$$\begin{aligned} &\overline{A+B}.\overline{KH^2 - KC^2 - HC^2} \\ &+D.\overline{DH^2 - DC^2 - HC^2} \end{aligned} = o; \text{ ma pel secondo si ha}$$

$$\overline{A+B}.\overline{AH^2 - KC^2 - HC^2} = \begin{aligned} &A.\overline{AH^2 - AC^2 - HC^2} \\ &+B.\overline{BH^2 - BC^2 - HC^2} \end{aligned}; \text{ dunque}$$

$$\begin{aligned} &A.\overline{AH^2 - AC^2 - HC^2} \\ &+B.\overline{BH^2 - BC^2 - HC^2} = o. \\ &+D.\overline{DH^2 - BC^2 - HC^2} \end{aligned}$$

C. Bella dimostrazione, e facile.

L. Passiamo da tre corpi a quattro, i quali sieno A, B, D, E: e menate le rette, come sopra, s' intendano i corpi A, B posti nel centro delle lor masse K. E' manifesto, che essendo C il centro delle masse de' quattro corpi A, B, D, E, lo sarà egualmente de' tre corpi A + B, D, E; dunque per ciò, che in tre corpi s' è dimostrato, si avrà

$$\begin{aligned} &\overline{A+B}.\overline{KH^2 - KC^2 - HC^2} \\ &+D.\overline{DH^2 - DC^2 - HC^2} = o; \text{ ma pel secondo lemma} \\ &+E.\overline{EH^2 - EC^2 - HC^2} \end{aligned}$$

$$\overline{A+B}.\overline{KH^2 - KC^2 - HC^2} = \begin{aligned} &A.\overline{AH^2 - AC^2 - HC^2} \\ &+B.\overline{BH^2 - BC^2 - HC^2} \end{aligned}: \text{ dun-}$$

que

$$\begin{aligned} & A.\overline{AH^2 - AC^2 - HC^2} \\ \text{que} + & B.\overline{BH^2 - BC^2 - HC^2} = 0. \\ + & D.\overline{DH^2 - DC^2 - HC^2} \\ + & E.\overline{EH^2 - EC^2 - HC^2}. \end{aligned}$$

La qual serie di dimostrazione potendosi avanzare da quattro a cinque corpi, da cinque a sei, e così di mano in mano fino ad infiniti corpi, si vede la proposizione esser universale.

N. Dall' universal proprietà contenuta nell' ultima vostra equazione, ch' è elegantissima, veggio benissimo, che discende il canone leibniziano per riguardo a i corpi molli. Ed ecco siccome per me si ragiona. Se i corpi molli A, B, D venissero all' urto colle velocità AC, BC, DC, posto, come s' è sempre fatto, C il centro comun delle masse, le forze loro prima dell' urto sarebbero $\frac{A.AC^2 + B.BC^2 + D.DC^2}{2}$; ma queste interamente nell' urto s' estinguono; dunque dee impiegarsi un egual quantità di forza viva, qualor si faccia la medesima contusione, come addiviene in tutti i casi per voi considerati; dunque venendo all' urto i corpi colle velocità AH, BH, DH, la forza viva prima dell' urto dovrà esser eguale alla forza viva appresso l' urto, cioè a quella, onde sono dotati i corpi viaggiando colla comune velocità CH, coll' aggiunta di quella, che s' è nella contusione perduta; cioè dovrà valer la seguente equazione

$$\frac{A.AH^2}{2} + \frac{B.BH^2}{2} + \frac{D.DH^2}{2} = \overline{A+B+D}.\frac{CH^2}{2} + \frac{A.AC^2}{2} + \frac{B.BC^2}{2} + \frac{D.DC^2}{2};$$

ma ciò è necessariamente vero, perocchè trasposti i termini della vostra ultima equazione, e fatta la divisione per 2, s' ottiene immediatamente questa equazione.

L. Per quel, ch' i corpi molli riguarda, la dimostrazione è compita. Quant' a' corpi perfettamente elastici, sebbene necessario sembra un nuovo universale teorema, pure con industria

ſtria ſervendomi dell' antecedente, renderò la dimoſtrazione breviſſima. Abbiamo avvertito di ſopra, che ſe i corpi foſſero collocati in M, N, P, il centro delle lor maſſe ſarebbe in H. Dunque pel teorema univerſale al preſente caſo adattato, ſi avrà

$$\begin{array}{l} A.MC^2 \\ +B.NC^2 \\ +D.PC^2 \end{array} = \overline{A+B+D}.CH^2 \begin{array}{l} +A.MH^2 \\ +B.NH^2 \\ +D.PH^2 \end{array}$$

. Di più s' è dimoſtrato eſſere

$$\begin{array}{l} A.AH^2 \\ +B.BH^2 \\ +D.DH^2 \end{array} = \overline{A+B+D}.CH^2 \begin{array}{l} +A.AC^2 \\ +B.BC^2 \\ +D.DC^2 \end{array}$$

; dunque eſſendo le MH, NH, PH reſpettivamente eguali alle AC, BC, DC, ſi avrà l' equazione

$$\begin{array}{l} A.AH^2 \\ +B.BH^2 \\ +D.DH^2 \end{array} = \begin{array}{l} A.MC^2 \\ +B.NC^2 \\ +D.PC^2 \end{array}$$

: nella prima parte diviſa per 2 s' eſprime la forza viva prima dell' urto; nella ſeconda parte ſimilmente diviſa per 2 la forza viva appreſſo l' urto ne' corpi perfettamente elaſtici; dunque in così fatto genere di corpi la forza viva leibniziana, e prima, e dopo dell' urto è la ſteſſa.

C. Tutto ciò, ch' abbiam detto, ſembrami, che ſenza difficoltà ſi poſſa a' corpi imperfettamente elaſtici accomodare. Concioſſiachè qual differenza havvi tra un elaſtro perfetto, ed un imperfetto? non altra ſe non ſe queſta, che un elaſtro perfetto nella ſteſſa guiſa ſi riapre, come è ſtato chiuſo; onde nello ſteſſo punto, o ſi ſerri, o ſi chiuda l' elaſtro, il corpo è dotato della ſteſſa velocità: laddove l' elaſtro imperfetto s' apre alquanto più lentamente, che non s' è chiuſo; onde nello ſteſſo punto, chiudendoſi l' elaſtro, la velocità del corpo è maggiore, minore aprendoſi. Così fatte velocità però ſerbano una ragione coſtante. Quindi raccoglieremo, che ſe i corpi A, B, D (*Fig.* 15) diretti al comun centro delle maſſe C, ſi portino a chiuder le ſerie degli elaſtri AC, BC, DC dotate di tali rigidità, che ſerbino la proporzion per voi ſtabilita, i corpi non ritorneranno dall' urto colle medeſime velocità, ma colle velo-

cità minori CR, CS, CT, le quali alle primitive CA, CB, CD hanno una data ragione. Ricaviam dunque la conseguenza, che se più corpi imperfettamente elastici port'nsi unitamente al comun centro delle masse, ritornano indietro con velocità, le quali sono alle velocità del congresso in data ragione.

Quindi chiamata in ajuto la teoria del movimento traslato dedurrem l'altre ipotesi. Posti i corpi dentro una gondola, si portino al comun centro delle masse C colle velocità AC, BC, DC, trattanto che la gondola viaggia colla celerità CH; chiara cosa è, che per riguardo al lido anderanno all'urto colle velocità AH, BH, DH; ma rispetto alla gondola tornano indietro colle velocità CR, CS, CT; dunque rispetto alla riva viaggeranno colle velocità composte di queste, e della velocità della barca, cioè, compiti i paralellogrammi RCHM, SCHN, TCHP, viaggeran dopo l'urto colle velocità CM, CN, CP: come si dovea determinare.

N La proprietà del centro delle masse viaggiante e prima, e dopo dell'urto colla stessa celerità converrà, non v'ha dubbio, a' corpi imperfettamente elastici, siccome a tutti gli altri generi conviene: ne sarà difficile a *dimostrarlo. I* corpi collocati in A, B, D hanno il centro delle masse in C; dunque essendo CR, CS, CT nella stessa proporzione, che CA, CB, CD, posti i corpi in R, S, T avranno il centro delle masse in C; dunque trasferiti in M, N, P avranno il centro delle masse in H. Laonde se si movessero colle velocità MC, NC, PC, il comun centro si moverebbe colla velocità HC; dunque movendosi colle velocità contrarie CM, CN, CP, il comun centro moverassi colla contraria velocità CH; ma tali sono le velocità de' corpi dopo l'urto; dunque la velocità del centro delle masse è CH, la quale essendo pur la velocità di tal centro prima dell'urto, ne segue, che il centro delle masse muovesi e prima, e dopo l'urto colla stessa celerità.

L. Voi vi fermate, ne proseguite dimostrando l'altra proprietà, che riguarda i prodotti delle masse ne' quadrati delle velocità, o sia le forze vive leibniziane.

N. Non dispererei di trovarne la dimostrazione, ma con un poco di studio, e di tempo: l'equazioni troppo sono inviluppate per presumere di ritrovarla improvvisamente. Ma non vorrei, ch' istigaste altrui per amore di liberarvi dalla fatica.

L. E

L. E perchè nò? Ma poichè voi ricusate d' essere sì cortese, la porterò io tutta intera, ma v' assicuro, che sarà più leggiera di quel, che v' immaginate. Dalla mia equazione ecumenica si ha, trasportati opportunamente i termini,

$$\begin{matrix} A.AH^2 \\ +B.BH^2 \\ +D.DH^2 \end{matrix} = \begin{matrix} A.\overline{HC^2+AC^2} \\ +B.\overline{HC^2+BC^2} \\ +D.\overline{HC^2+DC^2} \end{matrix}$$

; ma per la stessa ragione si ha ancor la seguente egualità, mettendo in luogo di MH, NH, PH le eguali RC, SC, TC

$$\begin{matrix} A.MC^2 \\ +B.NC^2 \\ +D.PC^2 \end{matrix} = \begin{matrix} A.\overline{HC^2+RC^2} \\ +B.\overline{HC^2+SC^2} \\ +D.\overline{HC^2+TC^2} \end{matrix}$$

. Sottraendo per tanto un' equazione dall' altra, si troverà

$$\begin{matrix} A.\overline{AH^2-MC^2} \\ +B.\overline{BH^2-NC^2} \\ +D.\overline{DH^2-PC^2} \end{matrix} = \begin{matrix} A.\overline{AC^2-RC^2} \\ +B.\overline{BC^2-SC^2} \\ +D.\overline{DC^2-TC^2} \end{matrix}$$

; e finalmente trasposti opportunamente i termini, s' avrà

$$\begin{matrix} A.AH^2 \\ +B.BH^2 \\ +D.DH^2 \end{matrix} = \begin{matrix} A.MC^2+A.\overline{AC^2-RC^2} \\ +B.NC^2+B.\overline{BC^2-SC^2} \\ +D.PC^2+D.\overline{DC^2-TC^2} \end{matrix}$$

. In questa equazione, quando si divida per 2, la ricercata proprietà si contiene. Conciossiachè la forza, che si perde, ne viene dall' elastro restituita, è eguale alla differenza tra la forza prima, e dopo l' urto nel caso, che i corpi al centro delle masse dirigansi, la qual vien espressa per la formula

$$A.\overline{AC^2 - RC^2} + B.\overline{BC^2 - SC^2} + D.\overline{DC^2 - TC^2}$$

diviſa per 2. Adunque la forza viva prima dell'urto è eguale alla forza viva dopo l'urto coll'aggiunta di quella parte, che perdeſi per l'imperfezion dell'elaſticità: ſiccome la teoria delle forze vive domanda, e ſi dovea dimoſtrare.

N. Il metodo è bello, e ingegnoſo, ed avanza la teoria della comunicazione del movimento. Tutto ciò però non ſervirebbe a' noſtri diſſegni, quando le dimoſtrate verità non iſpargeſſero di novello lume la controverſia, ch' abbiamo eſaminata fin ora.

L. A queſto fine mi dite di grazia, quai ſono le leggi, che ſi dimoſtrano aver luogo in tutti queſti generi di comunicazione di movimento, preſcindendo da ogni ſentenza?

N. Due leggi ritrovo eſſere univerſali. La prima è, che il centro delle maſſe, che vengono all'urto, ſi muove e prima, e dopo ſempre mai colla ſteſſa celerità. *L'altra*, che i prodotti delle maſſe ne' quadrati delle velocità ſono eguali prima, e dopo l'urto, quando a que', che ſi hanno appreſſo l'urto s'aggiunga una tal quantità, la quale è proporzionale alla contuſione, o ad altro effetto, che ſi mantiene.

L. Quanto alla legge della quantità del movimento, voi vedete chiaramente, che non ſi conſerva, perchè nel genere di comunicazione, ch' ora conſideriamo, la quantità del moto non è certamente eguale prima, e dopo l'urto, ma ora maggiore, ed ora minore: nella qual coſa non giudico di ſpendere più parole, eſſendo manifeſta, e patente.

N. Finchè ci ſiamo fermati negli urti diretti le due leggi, che il centro delle maſſe viaggia con eguale velocità, e che la quantità del movimento e innanzi, e dopo è ſimilmente eguale, non erano due diverſe, ma una ſteſſa ſteſſiſſima legge, o almeno una ſi deduceva dall' altra per legittima conſeguenza; ma paſſando agli urti indiretti, veggiamo, che ſi ſeparano, e ſi diſtinguono, conſervandoſi quella del centro delle maſſe, e venendo meno la legge della quantità del movimento, la quale per conſeguenza è meno univerſale dell'altra. Benchè di cotal mino-

minore universalità un qualche non leggiero indizio ne somministrano gli urti diretti, ne' quali, quando le quantità del movimento non sono cospiranti, ma contrarie, non si deve delle quantità del moto prender la somma, ma la differenza.

L. Venendo dunque meno negli urti indiretti, ch' abbiamo considerati, la legge, che la quantità del moto sia la stessa innanzi, e dopo dell' urto, e conservandosi l'altra legge, che la medesima sia la velocità del centro delle masse, sarà d' uopo questa paragonare colla legge, che risguarda i prodotti de' quadrati delle velocità nelle masse, la quale pur si mantiene negli urti indiretti, ne meno universal si discuopre. Converrà dunque esaminare quale di queste due leggi sia la principale, che consegue dall' azion delle forze morte, e deriva dalla proporzione, che dee passare inviolabilmente tra la cagione, e l'effetto.

A questo fine permettete, che brievemente ritorni a quella maniera di comunicazione di movimento per mezzo d una leva, di che abbiam parlato nel principio dell' odierno congresso. Sia il corpo A, (*Fig* 16) che urtando nel vette CA comunichi il moto al corpo posto in B. La proporzione della velocità di A alla velocità di B, sia come gli spazj aA, bB: le quali linee le prendo infinitesime, perchè in un moto infinitesimo amendue le velocità del corpo A non unito al vette, e del corpo B unito, si conservino al vette stesso perpendicolari. In queste supposizioni io ricerco, qual sarà la velocità del centro delle masse A, B. Quando i corpi sono in A, B il centro sia in H, e quando sono in a, b il centro sia b: si meni bH, la quale senza dubbio sarà paralella alle Au, Bb, e sarà proporzionale alla velocità del centro delle masse Si conduca ab, la qual passerà pel punto b, e si prolunghi, finchè tagli AB in L. Si chiami $Au = V$, $Bb = u$. E' noto, che sarà $V - u : u :: AB : BL = \frac{AB \cdot u}{V - u}$. Di più per la proprietà del centro delle masse, essendo $A : B :: BH : AH$ sarà componendo
$A : A + B :: BH : AB$; dunque $BH = \frac{A \cdot AB}{A + B}$; dunque $LH = \frac{AB \cdot u}{V - u} + \frac{A \cdot AB}{A + B}$; ma $LB : Bb :: LH\ Hb$; dunque $\frac{AB \cdot u}{V - u} : u :: \frac{AB \cdot u}{V - u} + \frac{A \cdot AB}{A + B} : Hb$; ovvero $1 : V - u :: \frac{u}{V - u} + \frac{A}{A + B} :$
Hb;

Hb; dunque $Hb = u + \frac{A \cdot \overline{V - u}}{A + B} = \frac{Au + Bu + AV - Au}{A + B} = \frac{AV + Bu}{A + B}$:
la qual formula esprime la velocità del centro delle masse, e vale egualmente o le velocità V, u si prendano prima, ovvero dopo dell'urto.

Quindi ricavar si vuole, che posti gli stessi corpi A, B la velocità del centro delle masse non può essere la medesima e prima, e dopo l'urto, quando la stessa non sia la quantità del movimento; ma abbiam dimostrato, che la quantità del movimento prima dell'urto or è maggiore, ora minore, or eguale a quella, che si ha dopo l'urto; dunque ancor la velocità del centro delle masse or è maggiore, or eguale, ed ora minore prima dell'urto, che dopo l'urto.

N. Veggio dove va a riuscire il vostro discorso. Voi la divisate così. Quella dev'esser la legge principale, quella dee corrispondere alla misura dell'azioni, e dee dipendere dall'egualità tra la cagione, e l'effetto, la quale è universalissima, e trova luogo in tutte le circostanze; quella poi, che cangiate circostanze si cangia, non può esser principale, ma dev'esser accessoria, e dipendente da circostanze mutabili; ma la legge, che risguarda i prodotti delle masse ne' quadrati delle velocità, si ritrova universalissima, e cangiate le circostanze non cangiasi; la legge, che risguarda il centro delle masse non sempre vale, perchè nella comunicazione del moto per mezzo d'un vette falsa l'abbiam dimostrata; dunque la prima è la principale, la dipendente dall'azioni, e dall'egualità tra la cagione, e l'effetto; l'altra è l'accessoria, e dipendente da circostanze, che ricevono cangiamento.

L. Eccovi un argomento fortissimo dedotto da que' medesimi principj metafisici, di cui ci siamo ne' dì passati serviti. Ma lasciando da parte la comunicazione del moto per mezzo d'un vette, fingiamo, ch'essa non sia stata esaminata da alcuno, e che le sue leggi sieno del tutto ignote. In quest'ipotesi non conoscendo noi intorno alla comunicazione del movimento se non se ciò, ch'appartiene agli urti diretti, e quel poco, ch'ho insegnato intorno agli urti indiretti, non avremmo criterio alcuno da giudicare, quale delle due leggi fosse più universale; perciocchè amendue han luogo in tutti questi generi

neri

neri di comunicazione di movimento. Pure, essendo così fatte leggi diverse, ne dipendendo l'una dall'altra, amendue non possono essere principali; ma una per necessità dovrà esser legge accessoria. Qual criterio sarebbe valevole a distinguere, e a separare la principale dall' accessoria?

C. I principj metafisici, che avete ne' dì passati stabiliti, poichè fondati per la maggior parte sull' universalità della legge, sembrano non esser nella vostra ipotesi di verun giovamento. Onde sarà mestieri di fissar qualche nuovo principio, da cui dedur si possa, quale delle due leggi tenga il primato.

L. Lasciate, che con alcune brevi interrogazioni, io vi cavi di bocca quella ragione, che penso bastevolmente distinguere la legge principale dall' accessoria, e vedrete per voi medesimo qual sia il principio, sopra il qual si fermi, ed appoggi. Le velocità, che vengono considerate da quella legge, che risguarda i prodotti delle velocità nelle masse, di chi sono, ed a chi appartengono?

C. Se comprendo appieno la vostra interrogazione, parmi di dover rispondere, che sono velocità dei corpi, che veramente si muovono, e che vengono vicendevolmente ad urtarsi.

L. I quai corpi sono veramente posti al mondo dalla natura, dotati di massa, e di vera inerzia, e tali, che richiedono a cangiare stato una qualche azione di forza morta. Non è così?

C. Senza fallo.

L. La velocità considerata dall' altra legge, che risguarda il centro delle masse, di chi è, ed a chi appartiene?

C. E' velocità del centro delle masse.

L. Il qual centro, soggiungete, non è posto al mondo dalla natura, ma da' geometri per ajutar la memoria, e compiere più speditamente le loro dimostrazioni, non è dotato di vera massa, ne di vera inerzia, ne abbisogna d' azione per mutare stato.

C. Voi dite il vero; ma non so intendere, come possa il centro delle masse stato cangiare senza bisogno d' azione.

L. Per meglio spiegar quel, che voglio intendere, vi sovvenga ciò, che alcune giornate sono, parlando della velocità di accesso, o di recesso da un punto dato, ho dimostrato, che può accrescersi, e diminuirsi cotale velocità senza azione alcuna

na di forza morta, e che il suo incremento, o decremento non corrisponde per guisa veruna all' azione esercitata. Questo proviene, perchè quantunque si parli di vera massa dotata d' inerzia, pure non considerandosi quella mutazion di stato, che in essa si produce, ma altra mutazion relativa, ch' è in mente sol de' geometri, non dev' essa aver proporzione coll' azione posta in opra dalla natura. Se così è, quando si considera una velocità, dirò così, ideale in un corpo veramente esistente; quanto più, quando si consideri la velocità, e la mutazione di stato in un punto di nulla inerzia dotato, il qual non ha nome, se non perchè da' geometri s' è discoperto competergli una qualche semplice proprietà, che ne' lor raziocinj li ajuta. E la ragione si è, perchè ivi al cangiamento di stato è necessaria l' azione, ove risiede l' inerzia; ma ne' punti geometrici sforniti di massa non risiede l' inerzia; dunque ec.

N. Avvertite, Sig. Cesare, che non si dice, ch' il centro delle masse possa acquistar, o perder velocità senza una qualche azione, che v' intervenga; ma solo s' insegna, che non è necessaria l' azione per alcuna proprietà, che sia in lui. Perciocchè se i corpi, delle cui masse si considera il centro, seguiranno a muoversi colle velocità, di cui son dotati, il centro non cangerà punto velocità; ma quando niuna azione intervenga, le velocità dei corpi cangiar non si possono; dunque ne pur la velocità del centro. Ben è vero però, che cotal' azione è necessaria per vincer l' inerzia de' corpi, non già del centro, che n' è sfornito, e che per conseguenza esercitar si deve contra de' corpi, non contro al centro, e che il cangiamento di stato, che soffre il centro, se così chiamar lo possiamo, non deve corrispondere all' azion esercitata, ma solo il cangiamento di stato, che soffrono i corpi.

L. Voi dite benissimo, quando consideriate la mutazion di velocità seguita nel centro a cagione delle velocità cangiate ne' corpi. Ma si può quella mutare, comunque di queste non si muti la quantità, bastando, che si cangi la lor direzione; lo che s' ottiene coll' obbligare uno, o più corpi a viaggiare per linee curve, nel qual caso, sebben si cangia la velocità del centro delle masse, v' interviene bensì una qualche forza morta, ma non già azione. Ma lasciando star questo chiudiamo il nostro argomento. Qual delle due leggi vi sembra, che deb-

ba

ba anteporsi, e chiamarsi principale; quella che considera velocità reali esistenti in corpi dotati di massa, e d'inerzia, e valevoli di sostenere una vera azione, ovver quella, ch'assume velocità esistenti in punti ideali sforniti di massa, e d'inerzia, ne suggetti ad alcuna azione di forza morta?

C. L'argomento è forte, e ha il suo peso; e da esso patentemente raccogliesi, che la legge, la qual risguarda i prodotti de' quadrati delle velocità nelle masse vuolsi anteporr'all'altra, che considera la velocità del centro delle masse. Ma non potrebbe egli dirsi, che non si considera la velocità del centro, ma la velocità delle masse, che nasce da una giusta risoluzione? Mi spiego. Sia del corpo A la velocità A O, (*Fig. 6*) e cammini il centro delle masse per la retta A B, o per una paralella. Condotta la O M normale alla A B, si risolva la velocità A O nelle due O M, A M. Similmente si faccia dell'altre velocità. Posto ciò, dico, che non considero la velocità del centro delle masse, che è un punto ideale, ma la velocità delle masse stesse nelle direzioni paralelle ad A M, per le quali se si multiplichino le masse, i prodotti si troveranno eguali prima, e dopo l'urto; essendo quest'egualità connessa, e dipendente dall'egualità delle velocità del centro delle masse innanzi, e dopo l'urto.

L. Aggiungete, purchè di tai prodotti si prenda la differenza, quando le direzioni sono contrarie, e dirette verissimo. Per altro sembra quasi, che ad arte, e per prevenire la vostra istanza, io abbia fatto menzione della velocità d'accesso, o di recesso, la quale a crescere, o a minorare non ha bisogno d'azione di forza morta. Imperocchè che altro è quella velocità, che considerate nella direzion, in cui viaggia il centro delle masse, ovvero in direzioni paralelle, se non la velocità, con che i corpi s'accostano, o s'allontanano ad una linea data normale alla linea, per cui il centro delle masse cammina? ma questa non è la velocità della natura, ma una velocità ideale, che è in mente sol de' geometri, e che senza azione di forza morta può accrescersi, e diminuirsi; dunque ritorna in campo la mia interrogazione. Qual delle due leggi dovrà anteporsi, qual discenderà dalla legge dell'azioni, e dall'egualità tra la cagione, e l'effetto, quella, che le vere velocità risguarda della natura, o pur quella, che risguarda velocità

ideali, che soltanto han l'essere nella mente de' matematici?

N. Non v'ha riparo; fa d'uopo di rendersi interamente, e di confessare, che la legge risguardante i prodotti de' quadrati delle velocità nelle masse è da anteporsi a quella, che risguarda, o la velocità del centro delle masse, o la velocità, con che le masse s'avvicinano ad una linea normale alla direzione del loro centro, e che quella, siccome principale, appartiene alla proporzione tra la cagione, e l'effetto, questa, siccome accessoria, dipende da altre circostanze non inviolabili. Tutto ciò s'accorda colle cose insegnate alcuni giorni sono, quando della misura dell'azion si parlava. Allora s'è dimostrato, che la legge principale, la qual contiene la misura dell'azione, e l'egualità tra la cagione, e l'effetto, è la legge degli spazj, che vien espressa dalla nota equazione $fds = \pm mudu$. Nella formula fds si contien la misura dell'azione, nell'altra $\pm mudu$ l'aumento, o il decremento della mutazione di stato; dunque un finito cangiamento di stato verrà rappresentato dalla sommatoria S $\pm mudu$, cioè da una formula, che considera i prodotti de' quadrati delle velocità nelle masse. Nella comunicazione del moto si cangia lo stato de' corpi, e questo per coerenza di dottrina dev'esser rappresentato da una formula somigliante, che risguarda i quadrati delle velocità nelle masse, la quale per conseguenza dovrà esser la principale. Se consideriamo il cangiamento, che segue nella somma di tutti i corpi, questo dovrà esser eguale a quella parte d'azione, la quale non restituisce ad un corpo ciò, che ha tolto all'altro, e che corrisponde alla contusion, che rimane. E ciò viene indicato dalla formula, la qual'insegna, ch i prodotti delle masse ne' quadrati delle velocità, che si hanno prima dell'urto, superano quelli, che si hanno dopo l'urto, per una quantità, che è proporzionale all'azione espressa dalla contusione, che si mantiene. Questa coerenza di dottrina così esatta, non può a meno di non far violenza ad ogni intelletto assuefatto a conoscere la verità. Quindi si raccoglie, che conforme alla natura, ed al vero è il progresso, onde il Signor s'Gravesande dalla legge leibniziana deduce le regole della comunicazione del movimento.

L. Io ho trattata la controversia, siccome veduto avete, con nuovi principj, e con nuovo metodo. I principj li giudi-

co

co certi, il metodo efatto, il raziocinio dimoftrativo. Per quanto abbia efaminato il tutto con diligenza, non ho faputo rinvenir ombra di paralogifmo ne' miei penfieri; non oftante non mi fo fidare interamente d'effi, finattantochè dalla più fana parte della repubblica matematica, non li veggia approvati. Se paralogifmo alcuno non avvi, avrò il piacere d'aver pofto fine ad una lite lunghiffima, ed oftinata; fe da alcuno una qualche ben provata fallacia verrà difcoperta, v'afficuro, che farò il primo a confeffare il mio errore, e a riconofcere, che la controverfia rimane nell'incertezza di prima.

C. V'afficuro, che le voftre ragioni m'hanno interamente convinto; e pur avete veduto, che fono entrato a parlar delle forze vive con moltiffimi pregiudicj, e con pochiffima indifferenza. Non ho lafciato di far ferie, e pefate rifleffioni fopra le materie, di che avevamo fatta parola, e di chiamar ad un rigorofiffimo efame i voftri penfieri, e argomenti. E quanto più li ho confiderati, tanto più mi fon comparfi chiari, convincenti, e dimoftrativi. Onde non credo, che perfona alcuna quantunque dotta, e profonda potrà di paralogifmo accufarvi. E tale è ancora il fentimento del Sig. Neftore, il quale conofcete, quanto fia d'ingegno pronto, ed acuto.

N. Io per certo vi debbo render grazie moltiffime, ch'abbiate rifchiarata la mia mente, che prima era in denfe tenebre involta. I voftri penfieri mi fembrano convincenti, ne credo, che in cofa metafifica produr fi poffan ragioni più forti dell'apportate da voi.

L. Pregio il voftro giudicio, e ne prendo fperanza, e conforto: contuttociò la noftra amicizia, e la benevoglienza, ch'avete per me, potrebbe nel giudicare rendervi manfueti più del dovere. Ma il mondo letterario, che giudica, non folamente ha fgombro l'animo d'ogni parzialità, ma fuole con rigida cenfura le novelle fcoperte leggere, e efaminare. Qualunque efito però fien per avere i miei lunghi ftudj, proteftomi, che non ho avuto altro in cuore, fe non di ritrovare la verità: la qual cofa s'avrò ottenuta, fon certo, che faranno alle perfone fcienziate le mie fatiche gradite. Che fe mi foffi dilungato dal vero, amerei, che la fallacia foffe fcoperta, ed i miei penfieri fepolti in una profonda dimenticanza.

FINE.

Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 14.

Pag. 420.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 15.
Fig. 16.

INDICE.

NELLA GIORNATA PRIMA.

NEL

NELLA GIORNATA SECONDA.

NELLA GIORNATA TERZA.

NELLA GIORNATA QUARTA.

NELLA GIORNATA NONA.

NELLA GIORNATA DECIMA.

NELLA GIORNATA UNDECIMA.

FINE

MAXIMILIANUS GONZAGA

SOCIETATIS JESU

In Provincia Veneta Præpositus Provincialis.

CUm librum, cui titulus, *Dialogo, dove delle forze vive, e delle azioni delle forze morte si tien discorso*, a P. Vincentio Riccati Societatis nostræ Presbytero italico idiomate conscriptum aliquot ejusdem Societatis Theologi recognoverint, & in lucem edi posse probaverint, potestate Nobis a R. P. Francisco Retz Præposito Generali ad id tradita, facultatem concedimus, ut typis mandetur, si ita iis, ad quos pertinet, videbitur. Cujus rei gratia has literas manu nostra subscriptas, & Sigillo nostro munitas dedimus.

Bononiæ die 18 Maji 1748.

Maximilianus Gonzaga.

Vidit D. Aurelius Caſtanea Clericus Regularis S. Pauli, & in Eccleſia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro SS. D. N. Benedicto XIV Archiepiſcopo Bononiæ.

24 *Aprilis* 1748.

IMPRIMATUR.

Fr. Seraphinus Maria Maccarinelli Vicarius Generalis S. Officii Bononiæ.